

5.4. Remarques sur certains problèmes elliptiques non linéaires non homogènes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

(5.40) $\left| \begin{array}{l} u_\varepsilon \text{ étant une solution quelconque de (5.37), } u_\varepsilon \rightarrow u_0 \text{ dans} \\ L^2(\Gamma) \text{ faible.} \end{array} \right.$

En effet, on note que (en posant $|\varphi|^2 = \int_\Gamma \varphi^2 d\Gamma$):

$$\varepsilon |u_\varepsilon|^2 \leq J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u_0) = \varepsilon |u_0|^2$$

donc:

$$(5.41) \quad |u_\varepsilon| \leq |u_0|.$$

On peut donc extraire une suite, encore notée u_ε , telle que:

$$(5.42) \quad u_\varepsilon \rightarrow w \text{ dans } L^2(\Gamma) \text{ faible.}$$

On vérifie sans peine que $y(u_\varepsilon) \rightarrow y(w)$ dans $H^1(\Gamma)$ faible et qu'alors:

$$(5.43) \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow J(w) = \int_\Gamma |y(w) - z_d|^2 d\Gamma.$$

Mais:

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v) \quad \forall v \in L^2(\Gamma) \text{ donne, avec (5.43):}$$

$$J(w) \leq J(v) \quad \forall v \in L^2(\Gamma)$$

donc $J(w) \leq J(u_0) = 0$ donc $y(w) \Big|_\Gamma = z_d$ donc $y(w) = \phi_0$, donc $w = u_0$, d'où (5.40).

A la lumière des résultats du n° 5.2., on peut conjecturer que sans l'hypothèse de régularité (5.39), u_ε converge vers u_0 dans un espace « plus grand » que $L^2(\Gamma)$.

Ce problème est ouvert; pour un peu en préciser l'énoncé, on est conduit à la question des problèmes « non linéaires non homogènes » qui est abordée au n° suivant.

5.4. Remarques sur certains problèmes elliptiques non linéaires non homogènes

Avec un changement de notations par rapport à (5.38), on étudie le problème suivant: trouver ϕ solution de

$$(5.44) \quad \left| \begin{array}{l} -\Delta\phi + \beta(\phi) = 0, \\ \phi \Big|_\Gamma = g \end{array} \right.$$

où g est, *par exemple*, donné dans $L^2(\Gamma)$ (le problème est facile si $g \in H^{1/2}(\Gamma)$).

Il faut évidemment introduire (puisqu'il en est déjà ainsi dans les cas *linéaires* analogues; Cf. Lions-Magenes [1], Chapitre 2) des solutions *faibles* de (5.44): on dira que ϕ est *solution faible* de (5.44) si:

$$(5.45) \quad (\phi, -\Delta\psi) + (\beta(\phi), \psi) = - \int_{\Gamma} g \frac{\partial\psi}{\partial\nu} d\Gamma$$

pour toute fonction ψ « régulière » dans Ω et *nulle sur* Γ (on a posé $(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \phi \psi dx$).

Cela posé, on a le résultat suivant, dû à H. Brezis [1].

THÉORÈME 5.2. *Soit $\delta(x) =$ distance de x à Γ . Si g est donné dans $L^1(\Gamma)$ le problème (5.45) admet une solution unique telle que :*

$$(5.46) \quad \phi \in L^1(\Omega),$$

$$(5.47) \quad \delta \beta(\phi) \in L^1(\Omega),$$

et où dans (5.45) on peut prendre $\psi \in H^{2,\infty}(\Omega) \cap H_0^{1,\infty}(\Omega)$ ¹⁾.

En outre l'application $g \rightarrow \phi = \phi(g)$ est Lipschitzienne, au sens suivant :
Si $g_i \in L^1(\Gamma)$ et si $\phi(g_i) = \phi_i$, on a :

$$(5.48) \quad \left| \begin{array}{l} \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^1(\Omega)} + \|\delta\beta(\phi_1) - \delta\beta(\phi_2)\|_{L^1(\Omega)} \\ \leq c \|g_1 - g_2\|_{L^1(\Gamma)}. \end{array} \right.$$

On va maintenant appliquer *la théorie de l'interpolation non linéaire* (Cf. Lions [6], J. Peetre [1]).

On vérifie sans peine que:

$$(5.49) \quad \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

L'application $g \rightarrow \phi = \phi(g)$ vérifie donc (5.49) et

$$(5.50) \quad \|\phi(g_1) - \phi(g_2)\|_{L^1(\Omega)} \leq c \|g_1 - g_2\|_{L^1(\Gamma)}.$$

On peut alors *interpoler* entre ces estimations (Cf. Lions [6]) et l'on en déduit le

¹⁾ I.e. $\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} \in L^\infty(\Omega), \psi = 0$ sur Γ .

THÉOREME 5.3. Pour $g \in L^p(\Gamma)$, $1 \leq p \leq \infty$, le problème (5.45) admet une solution $\phi(g)$ unique dans $L^p(\Omega)$.

On a en outre :

$$(5.51) \quad \|\phi(g)\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|g\|_{L^p(\Gamma)}.$$

Remarque 5.5.

On peut en outre montrer que dans les conditions du Théorème précédent :

$$(5.52) \quad \delta^{1/p} \beta(\phi) \in L^p(\Omega).$$

Remarque 5.6.

Si en particulier $g \in L^2(\Gamma)$, alors la solution faible de (5.44) vérifie : $\phi \in L^2(\Omega)$, $\delta^{1/2} \beta(\phi) \in L^2(\Omega)$ (donc $\delta^{1/2} \Delta \phi \in L^2(\Omega)$).

Il ne semble pas que l'on puisse définir $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ dans ces conditions. Mais

si $g \in L^p(\Gamma)$, $p > 2$, alors on peut définir $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ dans un espace de distributions sur Γ , par adaptation des méthodes de Lions-Magenes [1].

Pour d'autres résultats et d'autres applications de l'interpolation non linéaire, cf. L. Tartar [2].

6. PROBLÈMES DE GESTION OPTIMALE ET INÉQUATIONS VARIATIONNELLES

6.1. Un problème de gestion optimale ¹⁾

Soit s l'instant initial, $s \in [0, T]$ et soit x le stock de produits à l'instant s .

On se donne un processus de Wiener $f(t)$ ($f(0) = 0$) qui représente la demande cumulée jusqu'à l'instant t ; si l'on pose :

$$(6.1) \quad E f(t) = \mu(t)$$

on a :

$$(6.2) \quad E(f(t) - \mu(t)(f(s) - \mu(s))) = \int_0^{\min(t,s)} \sigma^2(\tau) d\tau.$$

¹⁾ Les résultats des n° 6.1 et 6.2 sont dus à Bensoussan et l'auteur [2] [3] et à Bensoussan, Goursat et l'auteur [1]; nous renvoyons aux articles détaillés des ces auteurs pour les (longs) détails techniques.