5.4. Remarques sur certains problèmes elliptiques non linéaires non homogènes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

(5.40) | *u_ε étant une solution quelconque de* (5.37), *$u_\varepsilon \to u_0$ dans $L^2(\Gamma)$ faible.*

En effet, on note que (en posant $|\varphi|^2 = \int_\Gamma \varphi^2 \, d\Gamma$):

$$\varepsilon |u_\varepsilon|^2 \leqslant J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant J_\varepsilon(u_0) = \varepsilon |u_0|^2$$

donc:

$$|u_\varepsilon| \leqslant |u_0|. \tag{5.41}$$

On peut donc extraire une suite, encore notée u_ε, telle que:

$$u_\varepsilon \to w \text{ dans } L^2(\Gamma) \text{ faible.} \tag{5.42}$$

On vérifie sans peine que $y(u_\varepsilon) \to y(w)$ dans $H^1(\Gamma)$ faible et qu'alors:

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \to J(w) = \int_\Gamma |y(w) - z_d|^2 \, d\Gamma. \tag{5.43}$$

Mais:

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant J_\varepsilon(v) \quad \forall v \in L^2(\Gamma) \text{ donne, avec (5.43):}$$
$$J(w) \leqslant J(v) \quad \forall v \in L^2(\Gamma)$$

donc $J(w) \leqslant J(u_0) = 0$ donc $y(w)\big|_\Gamma = z_d$ donc $y(w) = \phi_0$, donc $w = u_0$, d'où (5.40).

A la lumière des résultats du n° 5.2., on peut *conjecturer* que *sans l'hypothèse de régularité* (5.39), *u_ε converge vers u_0 dans un espace « plus grand » que $L^2(\Gamma)$.*

Ce problème est ouvert; pour un peu en préciser l'énoncé, on est conduit à la question *des problèmes « non linéaires non homogènes »* qui est abordée au n° suivant.

5.4. *Remarques sur certains problèmes elliptiques non linéaires non homogènes*

Avec un changement de notations par rapport à (5.38), on étudie le problème suivant: trouver ϕ solution de

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \beta(\phi) = 0, \\ \phi\big|_\Gamma = g \end{cases} \tag{5.44}$$

où g est, *par exemple*, donné dans $L^2(\Gamma)$ (le problème est facile si $g \in H^{1/2}(\Gamma)$).

Il faut évidemment introduire (puisqu'il en est déjà ainsi dans les cas *linéaires* analogues; Cf. Lions-Magenes [1], Chapitre 2) des solutions *faibles* de (5.44): on dira que ϕ est *solution faible* de (5.44) si:

$$(5.45) \qquad (\phi, -\Delta\psi) + (\beta(\phi), \psi) = -\int_\Gamma g \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \, d\Gamma$$

pour toute fonction ψ « régulière » dans Ω et *nulle sur* Γ (on a posé $(\phi, \psi) = \int_\Omega \phi \, \psi \, dx$).

Cela posé, on a le résultat suivant, dû à H. Brezis [1].

THÉORÈME 5.2. *Soit* $\delta(x)$ = *distance de* x *à* Γ. *Si* g *est donné dans* $L^1(\Gamma)$ *le problème* (5.45) *admet une solution unique telle que :*

$$(5.46) \qquad \phi \in L^1(\Omega),$$

$$(5.47) \qquad \delta\, \beta(\phi) \in L^1(\Omega),$$

et où dans (5.45) *on peut prendre* $\psi \in H^{2,\infty}(\Omega) \cap H_0^{1,\infty}(\Omega)$ [1]).

En outre l'application $g \to \phi = \phi(g)$ *est Lipschitzienne, au sens suivant :*

Si $g_i \in L^1(\Gamma)$ *et si* $\phi(g_i) = \phi_i$, *on a :*

$$(5.48) \qquad \left| \begin{array}{l} \| \phi_1 - \phi_2 \|_{L^1(\Omega)} + \| \delta\,\beta(\phi_1) - \delta\,\beta(\phi_2) \|_{L^1(\Omega)} \\ \leqslant c \, \| g_1 - g_2 \|_{L^1(\Gamma)} . \end{array} \right.$$

On va maintenant appliquer *la théorie de l'interpolation non linéaire* (Cf. Lions [6], J. Peetre [1]).

On vérifie sans peine que:

$$(5.49) \qquad \| \phi \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \| g \|_{L^\infty(\Gamma)} .$$

L'application $g \to \phi = \phi(g)$ vérifie donc (5.49) et

$$(5.50) \qquad \| \phi(g_1) - \phi(g_2) \|_{L^1(\Omega)} \leqslant c \, \| g_1 - g_2 \|_{L^1(\Gamma)} .$$

On peut alors *interpoler* entre ces estimations (Cf. Lions [6]) et l'on en déduit le

---

1) I.e. $\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \in L^\infty(\Omega)$, $\psi = 0$ sur Γ.

THÉOREME 5.3. *Pour* $g \in L^p(\Gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *le problème* (5.45) *admet une solution* $\phi(g)$ *unique dans* $L^p(\Omega)$.

On a en outre:

(5.51) $$\| \phi(g) \|_{L^p(\Omega)} \leqslant c \, \| g \|_{L^p(\Gamma)} .$$

Remarque 5.5.

On peut en outre montrer que dans les conditions du Théorème précédent:

(5.52) $$\delta^{1/p} \beta(\phi) \in L^p(\Omega).$$

Remarque 5.6.

Si en particulier $g \in L^2(\Gamma)$, alors la solution faible de (5.44) vérifie: $\phi \in L^2(\Omega)$, $\delta^{1/2} \beta(\phi) \in L^2(\Omega)$ (donc $\delta^{1/2} \Delta \phi \in L^2(\Omega)$).

Il ne semble pas que l'on puisse définir $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}$ dans ces conditions. Mais si $g \in L^p(\Gamma)$, $p > 2$, alors on peut définir $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}$ dans un espace de distributions sur Γ, par adaptation des méthodes de Lions-Magenes [1].

Pour d'autres résultats et d'autres applications de l'interpolation non linéaire, cf. L. Tartar [2].

6. Problèmes de gestion optimale et inéquations variationnelles

6.1. *Un problème de gestion optimale* [1])

Soit s l'instant initial, $s \in [0, T]$ et soit x le stock de produits à l'instant s.

On se donne un processus de Wiener $f(t)$ ($f(0) = 0$) qui représente la demande cumulée jusqu'à l'instant t; si l'on pose:

(6.1) $$Ef(t) = \mu(t)$$

on a:

(6.2) $$E\big(f(t) - \mu(t)(f(s) - \mu(s)\big) = \int_0^{\min(t,s)} \sigma^2(\tau)\, d\tau.$$

1) Les résultats des n° 6.1 et 6.2 sont dus à Bensoussan et l'auteur [2] [3] et à Bensoussan, Goursat et l'auteur [1]; nous renvoyons aux articles détaillés des ces auteurs pour les (longs) détails techniques.