Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1974)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROBLÈMES ACTUELS DE THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS
Autor: Gabriel, Pierre
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46914

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Extrait de *L'Enseignement mathématique*, T. XX, fasc. 3-4, 1974

PROBLÈMES ACTUELS DE THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

par Pierre GABRIEL

1. QUELQUES RAPPELS HISTORIQUES

La notion d'anneau et de module s'est dégagée au cours de la deuxième moitié du 19e siècle et c'est alors qu'ont été publiés les premiers énoncés de classification. De tous ces énoncés, qui étaient intimement liés à des problèmes géométriques ou matriciels, nous ne voulons retenir ici que les deux suivants:

Le théorème de Jordan classifie les matrices complexes à similitude près ou, si l'on veut, les modules de **C**-dimension finie sur l'algèbre des polynomes $\mathbf{C}[T]$. En fait, le « noyau » de la démonstration consiste en une classification des matrices nilpotentes, c'est-à-dire des modules de dimension finie sur les algèbres $\mathbf{C}[T]/(T^n)$.

Un problème de classification un peu plus général a été proposé par Weierstrass et finalement résolu par Kronecker vers 1900: deux couples de matrices complexes (A, B) et (A', B') de même type $m \times n$ sont dits équivalents s'il existe des matrices inversibles P et Q telles que $A' = PAQ$ et $B' = PBQ$. Kronecker a déterminé les classes d'équivalence de tels couples. Comme on le voit assez facilement, son problème se ramène à la classification des modules de **C**-dimension finie sur l'anneau $\mathbf{C}[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$: associer au couple (A, B) le module d'espace sous-jacent $k^n \oplus k^m$ tel que $X(u, v) = (0, Au)$ et $Y(u, v) = (0, Bu)$. Nous donnons plus loin la liste des classes d'isomorphisme de tels modules.

Aux résultats expérimentaux de la fin du 19e siècle a succédé de 1920 à 1950 une vague de « théories ». C'est alors qu'à été dégagée la notion d'anneau artinien et qu'ont été démontrés les premiers énoncés généraux non triviaux: l'anneau des endomorphismes d'un module indécomposable est local (Fitting), la décomposition d'un module de longueur finie en somme directe d'indécomposables est unique « à isomorphisme près » (Krull-Remak-Schmidt)... La fin de cette vague de théoriciens est marquée par la formulation des conjectures de Brauer-Thrall, dont il sera de nouveau question plus loin.

Le processus (dialectique !) d'alternance de périodes expérimentales et théoriques se poursuit avec quelques interruptions, car la question ne passionne vraiment les mathématiciens que par intermittence. En 1968 Gelfand et Ponomarev classifient les modules de dimension finie sur l'anneau $\mathbf{C}\,[X, Y]/(X\,Y)$. S'appuyant sur des résultats de Dade, Kupisch et Janusz construisent en 1969 les représentations modulaires indécomposables des groupes finis à sous-groupes de Sylow cycliques... En 1974 enfin, Nazarova et Roiter publient une démonstration de la conjecture de Brauer-Thrall fondée sur une quantité appréciable de résultats de nature expérimentale obtenus auparavant. Ce sont ces résultats expérimentaux que nous voulons aborder ici.

2. Modules de dimension finie sur $k\,[X, Y]/(X^m, X\,Y, Y^n)$.

Nous désignons par k un corps commutatif, et nous nous intéressons en fait aux modules de k-dimension finie sur l'anneau $k\,[[X, Y]]/(X\,Y)$. Un tel module consiste en la donnée d'un k-espace vectoriel de dimension finie M et de deux endomorphismes x, y tels que $xy = yx = 0$ et $x^m = y^n = 0$ pour m et n assez grands.

$$\begin{tikzcd}
e_0 \arrow[r, "x"] & e_1 \arrow[r, "x"] & e_2 \arrow[d, "y"] & & & \\
& & e_3 \arrow[d, "y"] & & & \\
& & e_4 \arrow[r, "x"] & e_5 \arrow[r, "x"] & e_6 \arrow[r, "x"] & e_7 \arrow[d, "y"] \\
& & & & & e_8
\end{tikzcd}$$

On peut associer à toute suite $n_1, n_2, \ldots, n_r$ d'entiers naturels $\geqslant 1$ un module dit de *première espèce* et d'espace sous-jacent $k^{1+n_1+\ldots+n_r}$. Nous explicitons les endomorphismes pour l'exemple de la suite 2, 2, 3, 1. Si $e_0, e_1, \ldots, e_8$ est la base naturelle de $k^{1+2+2+3+1}$, x envoie e_0 sur e_1, e_1 sur e_2, e_2 sur 0, e_3 sur 0, e_4 sur e_5, ..., e_7 sur 0, e_8 sur 0, tandis que y envoie e_0 sur 0, e_1 sur 0, e_2 sur e_3, e_3 sur e_4, e_4 sur 0, ..., e_7 sur e_8 et e_8 sur 0 (se reporter à la figure ci-dessus). Les modules ainsi obtenus sont tous *indécomposables*, c'est-à-dire qu'ils ne s'écrivent pas comme somme directe de sous-modules non nuls.

On peut construire des modules de 2e *espèce* à partir d'un monôme « non commutatif » en x et y^{-1} et d'un espace vectoriel V muni d'un automorphisme σ. Au monôme $x^2\, y^{-1}\, xy^{-2}$ correspond par exemple le module d'espace sous-jacent $V^{2+1+1+2} = V^6$, x et y opérant sur les différents facteurs de V comme l'indique la figure suivante

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[rr, "y=\mathrm{id}"] \arrow[dl, "x=\mathrm{id}"'] & & V \arrow[dr, "y=\sigma"] & \\
V & & & & V \\
 & V \arrow[ul, "y=\mathrm{id}"] \arrow[rr, "x=\mathrm{id}"'] & & V \arrow[ur, "x=\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

(ne pas perdre de vue que $xy = yx = 0$). Si l'on tient à obtenir une liste irrédondante de modules indécomposables de 2e espèce, il faut évidemment supposer que V n'est pas somme directe de 2 sous-espaces non nuls stables sous σ. Des monômes admissibles il faut en outre exclure les puissances, par exemple $y^{-1}\, xy^{-1}\, x = (y^{-1}x)^2$, et il convient de ne pas distinguer entre 2 monômes déduits l'un de l'autre par permutation cyclique, par exemple entre $x^2\, y^{-1}\, xy^{-2}$ et $y^{-1}\, x^2\, y^{-1}\, xy^{-1}$.

Gelfand et Ponomarev ont pu démontrer que tout module de dimension finie sur $k\,[[X, Y]]/(X\,Y)$ est une somme directe de modules indécomposables, de première ou de deuxième espèce [2]. L'interêt de cet énoncé réside en particulier dans le fait que, d'après Drozd, tout quotient de dimension finie de $k\,[[X, Y]]$ a lui-même un quotient de la forme $k\,[X, Y]/(X^2, X\,Y^2, Y^3)$, à moins qu'il ne soit isomorphe à l'un des anneaux suivants

$$k[X, Y]/(X^m, XY, Y^n) \quad \text{ou} \quad k[X, Y]/(X^m, XY, Y^n, X^m - \lambda Y^n)\,.$$

(Nous supposons ici k algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$). Dans le deuxième cas, Gelfand et Ponomarev nous fournissent une classification complète des modules de dimension finie. Dans le premier cas, Drozd peut montrer qu'une telle classification est hors de notre portée, dans la mesure où la connaissance des modules sur $k\,[X, Y]/(X^2, X\,Y^2, Y^3)$ impliquerait celle des modules sur toute algèbre de type fini.

3. Représentations modulaires des groupes finis ([3], [5])

Soient k un corps algébriquement clos et G un groupe fini. On sait que l'algèbre $k[G]$ du groupe G contient comme base sur k les éléments de G, le produit de deux tels éléments dans $k[G]$ étant le même que dans G. De plus, toute structure de $k[G]$-module sur un espace vectoriel V est déterminée par la donnée des automorphismes $v \mapsto g \cdot v$ de V, $g \in G$; elle équivaut par conséquent à la donnée d'un homomorphisme de groupes $G \to \mathrm{GL}(V)$, si $\mathrm{GL}(V)$ désigne comme d'habitude le groupe des automorphismes linéaires de V.

Lorsque k est de caractéristique 0, le théorème de Maschke nous dit que tout $k[G]$-module est une somme directe de $k[G]$-modules simples. Dans ce cas, les modules indécomposables coïncident donc avec les modules simples, c'est-à-dire les modules S n'ayant pas d'autres sous-modules que 0 ou S. La détermination explicite de ces modules simples peut soulever des difficultés considérables, mais que nous voulons taire ici ! Du point de vue de la classification des indécomposables, nous considérons notre problème comme résolu si nous pouvons le ramener au problème de la classification des modules simples.

Supposons donc k de caractéristique $p > 0$. On sait que tout groupe fini G d'ordre $n = p^a q$, avec q premier à p, contient des sous-groupes S d'ordre p^a et que tous ces sous-groupes sont conjugués entre eux; ce sont les sous-groupes de Sylow. Par exemple, si $G = \mathrm{GL}(m, \mathbf{F}_{p^s})$ est le groupe linéaire d'ordre m à coefficients dans le corps fini à p^s éléments, les matrices triangulaires (a_{ij}) telles que $a_{ii} = 1$ et $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ forment un p-sous-groupe de Sylow de G.

Kasch, Kneser et Kupisch ont pu montrer en 1957 que le nombre des classes d'isomorphisme de $k[G]$-modules indécomposables est fini si et seulement si les p-sous-groupes de Sylow de G sont cycliques. Ce résultat est relativement facile. Mais on a dû attendre jusque 1969 pour une description précise des indécomposables dans le cas cyclique (Kupisch, Janusz). Dans le cas du groupe linéaire, cette description s'applique au cas $m = 2$ et $s = 1$.

Comme la description générale est assez ardue, nous ne voulons expliciter que le cas particulier où G contient seulement un p-sous-groupe de Sylow S, nécessairement normal dans G. Ceci a lieu par exemple lorsque G est le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Il y a alors un

complément K de S dans G, c'est-à-dire un sous-groupe tel que $S \cap K = \{1\}$ et $S \cdot K = G$. Si σ désigne un générateur de $S = \{1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{p^a-1}\} = \sigma^{\mathbf{Z}/p^a\mathbf{Z}}$, l'opération de K sur S par automorphismes intérieurs est donnée par une formule du type

$$x \sigma x^{-1} = \sigma^{\chi(x)} \text{ avec } x \in K \text{ et } \chi(x) \in \mathbf{Z} / p^a\mathbf{Z} .$$

L'opération induite de K sur $k[S]$ laisse stable le drapeau

$$k[S] \supset k[S](\sigma - 1) \supset k[S](\sigma - 1)^2 \ldots$$

d'où l'on déduit l'existence d'un élément $\pi \in k[S](\sigma - 1)$, congru à $\sigma - 1$ modulo $(\sigma - 1)^2$ et tel que

$$x \pi x^{-1} = \chi(x) \pi \text{ pour tout } x \in K$$

(choisir un supplémentaire de $k[S](\sigma - 1)^2$ dans $k[S](\sigma - 1)$ stable sous K).

Considérons maintenant l'ensemble $\mathscr{E}$ des classes d'isomorphisme de K-modules simples. Pour tout $e \in \mathscr{E}$ nous choisissons un module simple $E(e)$ dans la classe e et nous notons ${}_\chi E(e)$ le K-module ayant même espace sous-jacent que $E(e)$, la nouvelle opération $*$ de K étant reliée à l'ancienne au moyen de la formule

$$x * m = \chi(x) x \cdot m .$$

On obtient ainsi une opération $(n, e) \mapsto \chi^n \cdot e$ de $\mathbf{Z}$ sur $\mathscr{E}$ telle $E(\chi^n e) \xrightarrow{\sim} {}_\chi E(\chi^{n-1} e)$. Les orbites de $\mathbf{Z}$ dans $\mathscr{E}$ sont, comme nous allons le voir, reliées aux G-modules indécomposables.

Partons d'une orbite $e = \chi^r \cdot e, \chi \cdot e, \chi^2 \cdot e, \ldots, \chi^{r-1} \cdot e$ de $\mathbf{Z}$ dans $\mathscr{E}$ et d'une « couronne » de hauteur $\leqq p^a$ de r espaces vectoriels. Une telle couronne est par définition un diagramme d'espaces vectoriels de la forme

$$\begin{tikzcd}
 & V_0 \arrow[dr, "f"] & \\
V_{r-1} \arrow[ur, "f"] & & V_1 \arrow[d, "f"] \\
V_{r-2} \arrow[u, "f"] & & V_2 \arrow[dl, "f"] \\
 & \cdots\cdots\cdots \arrow[ul, "f"] &
\end{tikzcd}$$

avec $f^{p^a} = f \circ f \circ \ldots \circ f = 0$. A ces données nous associons un G-module d'espace sous-jacent

$$\bigoplus_{i=0}^{i=r-1} E(\chi^i e) \otimes_k V_i .$$

L'opération de K est induite par celles de K sur les modules simples $E(\chi^i e)$. L'opération de $\sigma \in S$ sur les différents facteurs $E(\chi^i e) \otimes_k V_i$ est déterminée si l'on connaît celle de π, qui est elle-même décrite par la figure ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
 & E(e)\otimes V_0 \arrow[dr, "u\otimes f = \pi"] & \\
E(\chi^{r-1}e)\otimes V_{r-1} \arrow[ur, "\pi = u\otimes f"] & & E(\chi e)\otimes V_1 \arrow[d, "u\otimes f = \pi"] \\
E(\chi^{r-2}e)\otimes V_{r-2} \arrow[u, "\pi = u\otimes f"] & & E(\chi^2 e)\otimes V_2 \arrow[dl] \\
 & \cdots\cdots \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

où les $u : {}_\chi E(\chi^i e) \xrightarrow{\sim} E(\chi^{i+1} e)$ sont des K-isomorphismes choisis une fois pour toutes.

Le G-module ainsi construit est indécomposable si et seulement si notre couronne d'espaces vectoriels est indécomposable. Ceci a lieu s'il existe un $v \in V_i$ dont les itérés non nuls v, $f(v)$, $f^2(v)$, ... forment une base de $\bigoplus_{j=0}^{r-1} V_j$. On peut montrer qu'on obtient ainsi tous les G-modules indécomposables.

4. Espaces vectoriels munis de sous-espaces. ([4], [6])

Soit $\mathbf{O}$ un ensemble ordonné, Une k-représentation linéaire de $\mathbf{O}$ consiste en la donnée d'un k-espace vectoriel de dimension finie V et d'une famille de sous-espaces $(V(i))_{i \in \mathbf{O}}$ tels que $V(i) \subset V(j)$ si $i \leqq j$. La somme directe de deux représentations V' et V'' a pour espace sous-jacent $V' \oplus V''$ et est telle que

$$(V' \oplus V'')(i) = V'(i) \oplus V''(i)$$

pour tout i. Nous nous intéressons ici aux représentations indécomposables, c'est-à-dire aux représentations non nulles qui ne sont pas somme directe de 2 sous-représentations non nulles.

Kleiner, Nazarova et Roiter ont pu montrer que le nombre de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables était infini si et seulement si **O** contenait un sous-ensemble ordonné plein (c'est-à-dire muni de l'ordre induit) de l'un des types suivants:

$\{1, 2, 3, 4\}$ (4 points incomparables deux à deux)

$\{1 < 2, 3 < 4, 5 < 6\}$ (3 couples incomparables d'éléments comparables)

$\{1 < 2 < 3, 4 < 5 < 6, 7\}$

$\{1 < 2 < 3 < 4 < 5, 6 < 7, 8\}$

$\{1 < 2 < 3 < 4, 5 < 6 > 7 < 8\}$.

Cet énoncé joue un rôle essentiel dans leur démonstration des conjectures de Brauer-Thrall, dont nous allons donner le principe.

5. Le conjecture-théorème de Brauer/Thrall-Nazarova/Roiter ([7]).

Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos k. Pour tout entier naturel n, nous posons $v_A(n)$ = nombre de classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables de k-dimension n. La conjecture de Brauer-Thrall dit que, *si* $\sum_{n \in \mathbf{N}} v_A(n)$ *est infini, il y a une infinité de* n *tels que* $v_A(n) = \infty$. En 1968 Roiter a pu fournir un premier élément de réponse à cette conjecture en montrant de manière simple et élégante que si $\sum_{n \in \mathbf{N}} v_A(n)$ est infini, il y a une infinité de n tels que $v_A(n) \neq 0$. Une démonstration complète de la conjecture de Brauer-Thrall n'a été publiée qu'en 1974 par Nazarova et Roiter. La démonstration reste technique et épineuse. Nous en développons seulement le principe:

Raisonnant par récurrence sur la dimension de A, nous pouvons supposer que $\sum_n v_B(n) < \infty$ pour tout vrai quotient B de A, et que $v_A(n) < \infty$ pour presque tout n. Il s'agit alors de montrer que $\sum_n v_A(n) < \infty$.

Pour cela nous choisissons un idéal à gauche minimal S de A et, pour tout A-module M, nous notons $S(M)$ la somme des sous-modules de M isomorphes à S. Dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow S(M) \longrightarrow M \longrightarrow M / S(M) \longrightarrow 0$$

$M/S(M)$ est un module sur l'anneau résiduel $A' = A/S(A)$. Si nous fixons la classe d'isomorphisme T de $S(M)$ et la classe M' de $M/S(M)$, nous obtenons ainsi une injection

$$\left\{\begin{array}{l}\text{classes d'iso. de } A\text{-modules } M \text{ telles} \\ \text{que } S(M) \simeq T \text{ et } M/s(M) \simeq M'\end{array}\right\} \longrightarrow \operatorname{Aut} T \backslash \operatorname{Ext}^1_A(M', T)/\operatorname{Aut} M',$$

où l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des orbites du groupe $\operatorname{Aut} T \times (\operatorname{Aut} M')^{op}$ dans le groupe des extensions de T par M'. L'image de l'injection est formée des classes d'extensions E telles que $T \simeq S(E)$. On a donc

$$\left\{\begin{array}{l}\text{classes d'iso. de } A\text{-modules } M \text{ telles} \\ \text{que } S(M) \simeq T \text{ et } M/S(M) \simeq M\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Aut} T \backslash \operatorname{Ext}^1_A(M', T)/\operatorname{Aut} M'$$

lorsque $S(M') = 0$, ce qui est toujours le cas si $\operatorname{Ext}^1_A(S, S) = 0$.

Pour simplifier nous supposons dans toute la suite du raisonnement que $\operatorname{Ext}^1_A(S, S) = 0$.

Le module semi-simple T peut s'écrire sous la forme $T = S \otimes_k V$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. On a alors $\operatorname{Aut} T = \operatorname{Aut} V$ et

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}^1_A(M', T) &= \operatorname{Ext}^1_A(M', S \otimes V) \simeq \operatorname{Ext}^1_A(M', S) \otimes_k V \simeq \\ &\simeq \operatorname{Hom}_k\big(V^*, \operatorname{Ext}^1_A(M', S)\big).\end{aligned}$$

Cette dernière formule a l'avantage de bien mettre en évidence l'opération de $\operatorname{Aut} V$. On voit par exemple que deux applications linéaires $f, g \in \operatorname{Hom}_k(V^*, \operatorname{Ext}^1_A(M', S))$ appartiennent à la même orbite de $\operatorname{Aut} V$ si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(g)$.

Pour pouvoir également tenir compte de l'action de $\operatorname{Aut} M'$ Nazarova et Roiter sont amenés à introduire la catégorie « vectorielle » **V** qui suit: les objets de **V** sont les A'-modules de longueur finie; si M' et M'_1 sont deux tels objets, $\operatorname{Hom}_{\mathbf{V}}(M', M'_1)$ est l'image de $\operatorname{Hom}_A, (M'_1, M')$ dans $\operatorname{Hom}_k(E_{M'}, E_{M'_1})$ lorsque l'on pose $E_{M'} = \operatorname{Ext}^1_A(M', S)$.

La catégorie **V** est additive, k est contenu dans l'anneau des endomorphismes du foncteur identique, chaque objet de **V** est une somme directe finie d'indécomposables, le nombre de classes d'isomorphisme d'indé-

composables est fini, et l'anneau des endomorphismes d'un indécomposable est local. En outre, la catégorie $\mathbf{V}$ est reliée à celle des k-espaces vectoriels de dimension finie par un foncteur k-linéaire fidèle $E : M' \mapsto E_{M'}$. Nous résumerons ces propriétés en disant avec Nazarova et Roiter que le couple $(\mathbf{V}, E)$ est une *catégorie vectorielle.*

Lorsque $(\mathbf{V}, E)$ est une catégorie vectorielle, nous pouvons considérer les couples (M', V) formée d'un objet M' de $\mathbf{V}$ et d'un sous-espace vectoriel V de $E(M')$. On obtient un tel couple en associant par exemple à tout $f \in \mathrm{Hom}_k(V^*, \mathrm{Ext}^1_A(M', S))$ le sous-espace Imf de $E_{M'} = \mathrm{Ext}^1_A(M', S)$. Ces couples forment eux-mêmes une catégorie additive. Pour tout $M' \in \mathbf{V}$, nous désignons par $\nu(M')$ le nombre de classes d'isomorphisme de couples indécomposables de la forme (M', V).

La conjecture de Brauer-Thrall résulte alors de l'énoncé suivant de Nazarova et Roiter:

THÉORÈME. *Soit* $(\mathbf{V}, E)$ *une catégorie vectorielle telle que* $\nu(M') < \infty$ *pour presque tout objet* M' *de* V. *Alors* $\sum_{M' \in \mathbf{V}} \nu(M') < \infty$.

Pour démontrer ce théorème, Nazarova et Roiter montrent d'abord combien l'hypothèse est draconienne. Elle implique par exemple que $\dim_k E(M') \leqq 3$ pour tout indécomposable $M' \in \mathbf{V}$. Il réduisent ensuite le problème au cas où $\dim_k E(M') \leqq 1$. Dans ce dernier cas on retrouve le problème du paragraphe 4. Soit en effet $\mathbf{O}$ l'ensemble des classes d'indécomposables de $\mathbf{V}$. Pour tout $i \in \mathbf{O}$, soient M_i un représentant de la classe i et $k_i = E(M_i)$. On définit une relation d'ordre sur $\mathbf{O}$ en posant $i \geqq j$ lorsque $\mathrm{Hom}_{\mathbf{V}}(M_i, M_j) \neq 0$.

A tout couple (M', V) est alors associé une représentation linéaire de $\mathbf{O}$ d'espace sous-jacent V. Il suffit de poser

$$V(j) = V \cap E(M')(j) \text{ et } E(M')(j) = \sum Im\, E(f),$$

où f parcourt les morphismes $M_i \to M'$ de V tels que $j \not\leqq i$. Il reste alors à voir, ce qui est relativement facile, que l'application $(M', V) \mapsto (V(j))_{j \in \mathbf{O}}$ induit une bijection

$$\left\{\begin{array}{l}\text{classes d'isomorphisme}\\ \text{de couples indécompo-}\\ \text{sables } (M', V) \text{ tels que}\\ V \neq 0\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{l}\text{classes d'isomorphisme}\\ \text{de représentations liné-}\\ \text{aires indécomposables}\\ \text{de } \mathbf{O}\end{array}\right\}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] GABRIEL, P. Indecomposable Representations II. *Symposia Mathematica, Volume XI*, (1973), pp. 81-104, *Istituto Nazionale di Alta Mathematica.*

[2] GELFAND, I. M. and V. A. PONOMAREV. Non decomposable representations of the Lorentz group. *Usp. Mat. Nauk, 23* (1968), pp. 3-60.

[3] JANUSZ, G. J. Indecomposable modules for finite groups, *Ann. of Math. 89* (1969), pp. 209-241.

[4] KLEINER, G. B. Sur les ensembles ordonnés ayant un nombre fini de représentations indécomposables. *Zapiski naučnykh Seminarov Lening. Otd. Mat. Inst. Steklova, 28* (1972), pp. 32-41.

[5] KUPISCH, H. Unzerlegbare Moduln endlicher Gruppen mit zyklischer p-Sylow Gruppe. *Math. Zeit. 108* (1969), pp. 77-104.

[6] NAZAROVA, L. A. et A. V. ROITER. Représentations des ensembles ordonnés. *Zapisk naučnykh Seminarov Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova, 28* (1972), pp. 5-31.

[7] —— Problèmes matriciels « catégoriques » et conjecture de Brauer-Thrall. *Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences d'Ukraine, Kiev 1974, preprint.*

(Reçu le 3 décembre 1974)

P. Gabriel

Mathematisches Institut der Universität
Freiestrasse, 36
CH-8032 Zürich