3. Représentations modulaires des groupes finis ([3], [5])

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

3. Représentations modulaires des groupes finis ([3], [5])

Soient k un corps algébriquement clos et G un groupe fini. On sait que l'algèbre $k[G]$ du groupe G contient comme base sur k les éléments de G, le produit de deux tels éléments dans $k[G]$ étant le même que dans G. De plus, toute structure de $k[G]$-module sur un espace vectoriel V est déterminée par la donnée des automorphismes $v \mapsto g \cdot v$ de V, $g \in G$; elle équivaut par conséquent à la donnée d'un homomorphisme de groupes $G \to \mathrm{GL}(V)$, si $\mathrm{GL}(V)$ désigne comme d'habitude le groupe des automorphismes linéaires de V.

Lorsque k est de caractéristique 0, le théorème de Maschke nous dit que tout $k[G]$-module est une somme directe de $k[G]$-modules simples. Dans ce cas, les modules indécomposables coïncident donc avec les modules simples, c'est-à-dire les modules S n'ayant pas d'autres sous-modules que 0 ou S. La détermination explicite de ces modules simples peut soulever des difficultés considérables, mais que nous voulons taire ici ! Du point de vue de la classification des indécomposables, nous considérons notre problème comme résolu si nous pouvons le ramener au problème de la classification des modules simples.

Supposons donc k de caractéristique $p > 0$. On sait que tout groupe fini G d'ordre $n = p^a q$, avec q premier à p, contient des sous-groupes S d'ordre p^a et que tous ces sous-groupes sont conjugués entre eux ; ce sont les sous-groupes de Sylow. Par exemple, si $G = \mathrm{GL}(m, \mathbf{F}_{ps})$ est le groupe linéaire d'ordre m à coefficients dans le corps fini à p^s éléments, les matrices triangulaires (a_{ij}) telles que $a_{ii} = 1$ et $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ forment un p-sous-groupe de Sylow de G.

Kasch, Kneser et Kupisch ont pu montrer en 1957 que le nombre des classes d'isomorphisme de $k[G]$-modules indécomposables est fini si et seulement si les p-sous-groupes de Sylow de G sont cycliques. Ce résultat est relativement facile. Mais on a dû attendre jusque 1969 pour une description précise des indécomposables dans le cas cyclique (Kupisch, Janusz). Dans le cas du groupe linéaire, cette description s'applique au cas $m = 2$ et $s = 1$.

Comme la description générale est assez ardue, nous ne voulons expliciter que le cas particulier où G contient seulement un p-sous-groupe de Sylow S, nécessairement normal dans G. Ceci a lieu par exemple lorsque G est le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Il y a alors un complément K de S dans G, c'est-à-dire un sous-groupe tel que $S \cap K = \{1\}$ et $S \cdot K = G$. Si σ désigne un générateur de $S = \{1, \sigma, \sigma^2, ..., \sigma^{p^a-1}\} = \sigma^{\mathbf{Z}/p^a\mathbf{Z}}$, l'opération de K sur S par automorphismes intérieurs est donnée par une formule du type

$$x \sigma x^{-1} = \sigma^{\chi(x)} \text{ avec } x \in K \text{ et } \chi(x) \in \mathbf{Z} / p^a \mathbf{Z} .$$

L'opération induite de K sur $k[S]$ laisse stable le drapeau

$$k[S] \supset k[S](\sigma - 1) \supset k[S](\sigma - 1)^2 \ldots$$

d'où l'on déduit l'existence d'un élément $\pi \in k[S](\sigma - 1)$, congru à $\sigma - 1$ modulo $(\sigma - 1)^2$ et tel que

$$x \pi x^{-1} = \chi(x) \pi \text{ pour tout } x \in K$$

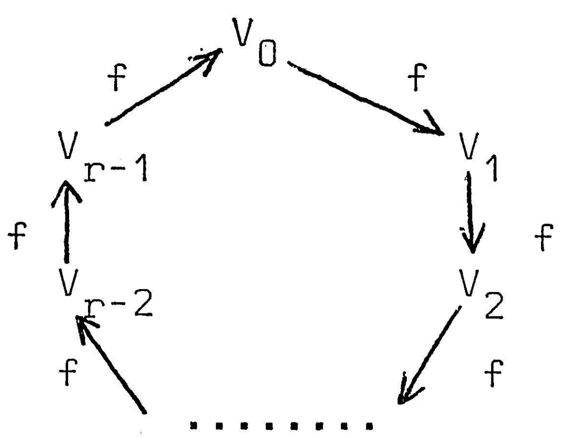
(choisir un supplémentaire de $k[S](\sigma - 1)^2$ dans $k[S](\sigma - 1)$ stable sous K).

Considérons maintenant l'ensemble $\mathscr{E}$ des classes d'isomorphisme de K-modules simples. Pour tout $e \in \mathscr{E}$ nous choisissons un module simple $E(e)$ dans la classe e et nous notons ${}_\chi E(e)$ le K-module ayant même espace sous-jacent que $E(e)$, la nouvelle opération $*$ de K étant reliée à l'ancienne au moyen de la formule

$$x * m = \chi(x) x \cdot m .$$

On obtient ainsi une opération $(n, e) \mapsto \chi^n \cdot e$ de $\mathbf{Z}$ sur $\mathscr{E}$ telle $E(\chi^n e) \xrightarrow{\sim} {}_\chi E(\chi^{n-1} e)$. Les orbites de $\mathbf{Z}$ dans $\mathscr{E}$ sont, comme nous allons le voir, reliées aux G-modules indécomposables.

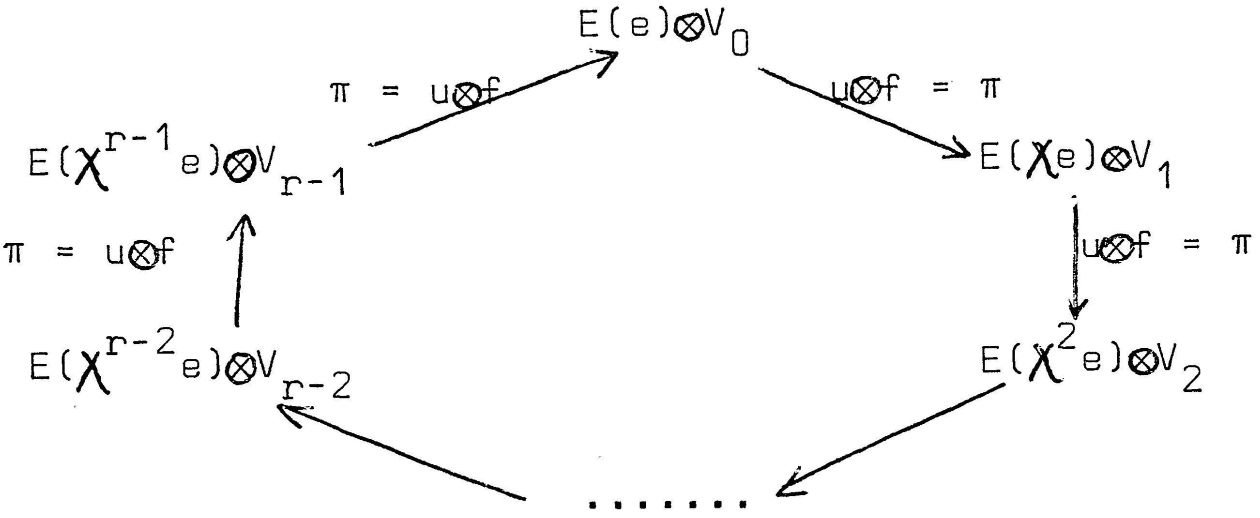
Partons d'une orbite $e = \chi^r \cdot e, \chi \cdot e, \chi^2 \cdot e, ..., \chi^{r-1} \cdot e$ de $\mathbf{Z}$ dans $\mathscr{E}$ et d'une « couronne » de hauteur $\leqq p^a$ de r espaces vectoriels. Une telle couronne est par définition un diagramme d'espaces vectoriels de la forme



avec $f^{p^a} = f \circ f \circ \ldots \circ f = 0$. A ces données nous associons un G-module d'espace sous-jacent

$$\bigoplus_{i=0}^{i=r-1} E(\chi^i e) \otimes_k V_i .$$

L'opération de K est induite par celles de K sur les modules simples $E(\chi^i e)$. L'opération de $\sigma \in S$ sur les différents facteurs $E(\chi^i e) \otimes_k V_i$ est déterminée si l'on connaît celle de π, qui est elle-même décrite par la figure ci-dessous



où les $u : {}_{\chi}E(\chi^i e) \xrightarrow{\sim} E(\chi^{i+1} e)$ sont des K-isomorphismes choisis une fois pour toutes.

Le G-module ainsi construit est indécomposable si et seulement si notre couronne d'espaces vectoriels est indécomposable. Ceci a lieu s'il existe un $v \in V_i$ dont les itérés non nuls v, $f(v)$, $f^2(v)$, ... forment une base de $\bigoplus_{j=0}^{r-1} V_j$. On peut montrer qu'on obtient ainsi tous les G-modules indécomposables.

4. Espaces vectoriels munis de sous-espaces. ([4], [6])

Soit $\mathbf{O}$ un ensemble ordonné, Une k-représentation linéaire de $\mathbf{O}$ consiste en la donnée d'un k-espace vectoriel de dimension finie V et d'une famille de sous-espaces $(V(i))_{i \in \mathbf{O}}$ tels que $V(i) \subset V(j)$ si $i \leqq j$. La somme directe de deux représentations V' et V'' a pour espace sous-jacent $V' \oplus V''$ et est telle que

$$(V' \oplus V'')(i) = V'(i) \oplus V''(i)$$