

# § 1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LE PROBLÈME DE KUMMER

par Carlos Julio MORENO

## § 1. INTRODUCTION

Soit  $p$  un nombre premier de la forme  $p = 1 + 3t$  et  $g$  un générateur du groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ . Soit encore  $\chi$  le caractère cubique non principal défini par le symbole

$$\chi(k) = \rho^{\text{Ind}_g(k)},$$

où  $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$  et  $k = g^{\text{Ind}_g}$  dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ . La somme de Gauss pour le caractère  $\chi$  est donnée par la formule

$$(1) \quad \tau_p = \sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) e^{\frac{2\pi i k}{p}}.$$

On connaît deux résultats classiques sur la valeur du module de la somme de Gauss ([7] § 20)

$$A) \quad |\tau_p| = p^{\frac{1}{2}}$$

$$B) \quad \tau_p = p^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_p},$$

où les angles  $\theta_p$  sont bien définis à conjugaison près.

Kummer ([12], [13]) a calculé la valeur numérique de  $\tau_p$  pour tous les nombres premiers  $p \leq 499$  et a fait l'observation suivante (en utilisant une notation moderne):

*Conjecture de Kummer*

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1 \pmod{3}}} \chi_h(\theta_p) = \frac{W_h x}{2 \log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right), \quad h = 1, 2, 3,$$

où  $\chi_1$  (resp.  $\chi_2, \chi_3$ ) est la fonction caractéristique de l'intervalle  $(0, \frac{\pi}{3}]$  (resp.  $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ ,  $(\frac{2\pi}{3}, \pi]$ ), et

$$W_h = \begin{cases} \frac{1}{2}, & h = 1 \\ \frac{1}{3}, & h = 2 \\ \frac{1}{6}, & h = 3. \end{cases}$$

Un grand nombre des nouveaux calculs par Goldstine et von Neumann [6], Lehmer [15], et Cassels [1] nous ont conduits à douter de la véracité de la conjecture de Kummer; les mêmes calculs semblent aussi indiquer que les angles  $\theta_p$  sont équirépartis dans l'intervalle  $(0, \pi)$  pour la mesure de Lebesgue. Le but de cette note est de donner une démonstration du résultat suivant.

*Théorème.* Soit  $\chi_I$  la fonction caractéristique d'un sous-intervalle  $I$  de  $(0, \pi]$ , alors

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1 \pmod{3}}} \chi_I(3\theta_p) = \frac{|I| x}{2 \log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

où  $|I|$  est la mesure de Lebesgue de  $I$ .

*Remarque.* Le Théorème a été énoncé comme une loi de distribution des nombres premiers mais on peut dire simplement que les angles de la troisième puissance de  $\tau_p$  sont équirépartis dans l'intervalle  $(0, \pi]$  pour la mesure de Lebesgue.

## § 2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

L'idée de la démonstration a été déjà considérée par Davenport-Hasse [4] et aussi par Weil [21]. Elle consiste à interpréter les sommes de Gauss comme des traces d'opérateurs de Frobenius.

Soit  $E = Q(\rho)$  le corps quadratique imaginaire obtenu en adjoignant  $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$  à  $Q$  et  $J_E$  son anneau d'entiers. L'arithmétique de  $J_E$  est bien connue et on sait que les nombres premiers dans  $J_E$  appartiennent à deux classes selon que la norme est un nombre premier rationnel ou le carré d'un nombre premier rationnel. Dans ce paragraphe, nous décrivons une construction locale des sommes de Gauss. Soit  $\mathfrak{q}$  un nombre premier de  $J_E$ ,  $F_{\mathfrak{q}}$  son corps résiduel et  $N_{E/Q}(\mathfrak{q}) = q$  l'ordre de  $F_{\mathfrak{q}}$ . Il est très facile de voir que  $q \equiv 1 \pmod{3}$ , ce qui permet de construire un caractère cubique multipli-