Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1974)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PETITE ENFANCE DE LA TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE
Autor: Pont, Jean-Claude
Kapitel: §4. — Gauss-Listing
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46897

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

sa mort, survenue en 1895. Ludwig Schläfli est l'un des plus grands mathématiciens de son temps, et il faut le placer immédiatement après Euler dans la hiérarchie des mathématiciens suisses. On lui doit de remarquables découvertes dans tous les domaines des mathématiques: à côté de quelques mémoires sur les fonctions elliptiques, la théorie des nombres et la théorie des systèmes d'équations algébriques, il s'est occupé avec brio de la théorie des surfaces du troisième ordre, de la théorie des polyèdres de l'espace à n dimensions; il est le co-inventeur de la loi d'inertie de Sylvester; il a découvert la non-orientabilité du plan projectif, la réduction des matrices orthogonales; en géométrie différentielle, c'est lui qui a trouvé les conditions pour qu'une variété soit à courbure constante (il faut que ses géodésiques apparaissent comme droites dans un certain système de coordonnées). Il s'est intéressé au problème des rapports entre les formes non euclidiennes et l'espace physique, etc. Apprécié à sa juste valeur par tous les grands de la mathématique de son temps, il reçoit en 1870, consécration suprême, le prix Steiner de l'Académie de Berlin [1]. Vers 1850, Schläfli met la dernière main à un manuscrit d'un intérêt considérable. Il décrit lui-même son travail comme « ... visant à fonder et à développer un nouveau rameau de l'analyse, qui soit, en même temps, une géométrie analytique à 2 et 3 dimensions. Comme la géométrie ordinaire peut être nommée théorie d'un continu trois fois étendu, j'ai nommé ma théorie, théorie d'un continu multiplement étendu.» Malheureusement, l'ampleur du mémoire empêche sa publication; il ne voit finalement le jour qu'en 1901, six ans après la mort de son auteur.

Son importance pour notre histoire provient de ce qu'il contient la relation $\sum_{1}^{n-1}(-1)^m \alpha_m + (-1)^n = 1$, qui est la généralisation du théorème d'Euler au cas de l'espace à n dimensions.

§ 4. — Gauss-Listing

Après un siècle d'histoire, le théorème d'Euler a parcouru toutes les étapes réservées à un honnête théorème: apparition empirique, énoncé approximatif, démonstration dans un cas particulier, énoncé exact, généralisation. On doit cependant remarquer que, pendant tout ce siècle consacré au théorème d'Euler, on n'a guère parlé de topologie; ni Euler, ni Legendre,

[1] Voir J. J. Burckhardt, *Ludwig Schläfli*, Birkhaüser, Basel 1948, 23 p.

pas plus que Lhuilier, von Staudt ou Schläfli n'ont vu, ou signalé, le lien entre le théorème d'Euler et l'*analysis situs*. Gauss et son élève Listing vont combler cette lacune. Commençons par quelques rappels biographiques. Gauss est né en 1777. Par son comportement, on peut le rattacher aux savants du XVIIIe siècle: il ne publie presque pas, communique ses découvertes — quand il les communique — par ses conversations et par sa volumineuse correspondance. Il n'a guère d'élèves, tout au plus quelques disciples et collègues. C'est en 1794, soit au début de sa carrière scientifique que Gauss se lie d'amitié avec l'*analysis situs*; il l'utilise pratiquement et sciemment dans sa dissertation inaugurale de 1799, où il démontre le théorème fondamental de l'algèbre. A de nombreuses reprises par la suite, il mentionne la topologie et son importance pour les mathématiques dans sa correspondance et dans ses conversations [1]. L'extrait suivant, d'une lettre de Gauss à Hansen, écrite en 1825, fait bien voir la conception qu'il a de la topologie: « Vous avez entièrement raison de prétendre que dans toutes les constructions de cartes, la similitude dans les plus petites parties constitue la condition essentielle, que l'on ne peut négliger que dans des circonstances tout à fait spéciales. Il serait d'ailleurs utile de créer une dénomination propre aux représentations qui remplissent cette condition. En outre, elles ne sont que des cas particuliers de la représentation la plus générale d'une surface sur une autre qui, à chaque point de l'une, fait correspondre un point de l'autre, et ceci d'une façon continue.»

Dans un travail publié en 1827, consacré à la théorie des surfaces, et qui est l'un des principaux textes de Gauss, on voit le Prince des mathématiciens poser et étudier le problème de la déformation isométrique des surfaces; c'est une étape indispensable, qui préfigure et annonce l'étude, plus générale celle-là, des déformations topologiques. Dans ce même travail, Gauss introduit la courbure totale d'une surface, qui tiendra un si grand rôle dans le développement de la topologie. L'influence de Gauss sur l'évolution de l'*analysis situs* apparaît encore et surtout, à travers les travaux de Listing et ceux de Möbius-Klein.

Johann Benedikt Listing est né en 1808. Il arrive à Göttingen en 1829; il y devient élève assidu de Gauss, qui lui parle notamment de topologie. C'est Listing qui crée le mot topologie; on le trouve pour la première fois dans une lettre qu'il écrit en 1836 à l'un de ses amis [2]. En 1847, il publie un ouvrage intitulé *Vorstudien zur Topologie*, qui consacre l'entrée officielle

---

[1] Voir opuscule cité (p. 32-33).
[2] *idem* (p. 41-42).

du vocable topologie dans le cortège des termes mathématiques. Voici, tiré de l'introduction de ce livre, un passage significatif: « Lorsque l'on considère des formes spatiales, on peut se placer au point de vue de la quantité ou à celui de la qualité. Aussi variées que soient leurs méthodes et leur objet, les recherches de la géométrie accordent, dans leurs développements actuels, la priorité à la première catégorie; aussi, la géométrie a-t-elle de tout temps été regardée comme une partie de la science des grandeurs, ainsi d'ailleurs que son nom l'indique. Le deuxième point de vue, celui de la qualité, c'est-à-dire celui qui se rapporte aux questions de position et d'ordre, ne fut étudié en géométrie que pour autant qu'il fût possible de l'adapter à celui de la quantité.»

Et plus loin: « Si l'on fait abstraction des quelques rares contributions dont nous venons de parler, c'est de l'avenir que le côté qualitatif de la géométrie attendra son développement. L'étonnement que peut engendrer le fait que rien ne s'est accompli dans ce domaine du savoir, depuis l'instigation de Leibniz, se tempèrera peut-être si l'on songe aux multiples difficultés que l'on rencontre lors de la mise sur pied de méthodes efficaces et convenables, permettant de ramener l'intuition spatiale à des concepts, et à l'insuffisance de la langue. L'importance du sujet m'ayant été signalée par le plus grand géomètre de notre temps, je me suis essayé depuis longtemps à l'analyse de certains cas qui relèvent de cette science... Qu'il me soit permis d'utiliser pour ce genre de recherches sur les complexes spatiaux le mot topologie, en lieu et place de la dénomination *geometria situs* proposée par Leibniz, qui rappelle l'idée de mesure et qui, en outre, se rapproche par trop de l'expression géométrie de position, qu'il est d'usage d'employer dans un domaine différent de celui que nous considérons. Par topologie, nous entendrons donc l'étude des aspects qualitatifs des formes spatiales ou des lois de la connexion, de la position mutuelle et de l'ordre des points, droites, surfaces, corps, ainsi que de leurs parties ou de leurs réunions, abstraction faite de leurs rapports de mesure et de grandeur... Pour s'élever au rang d'une science exacte, vers lequel tout semble l'appeler, la topologie doit chercher à ramener les faits, qui lui sont suggérés par l'intuition spatiale, à des concepts aussi simples que possibles...»

Le second travail topologique de Listing date de 1861. Dans ce très long mémoire, l'effort de Listing se porte sur l'extension du théorème d'Euler au cas des complexes spatiaux les plus généraux. Il essaye de déterminer l'influence de la nature topologique de chaque constituant du complexe sur la caractéristique d'Euler, en faisant nommément appel à

la topologie. Il attribue, à chaque constituant, un nombre, son ordre de cyclodicité, à qui il reconnaît la nature d'un invariant topologique. C'est là une nouveauté de taille. On doit toutefois préciser que Listing est passé à côté du problème fondamental de la topologie des surfaces. En outre, bien qu'il ait le premier mentionné dans ses écrits cette surface que l'on appelle le ruban de Möbius, il n'a pas conçu, même en principe, une théorie topologique des surfaces non orientables.

§ 5. — Riemann

A. 1851 marque un tournant dans notre histoire. C'est au cours de cette année que Riemann, âgé de 25 ans, écrit ses *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe* (Dissertation inaugurale); à cette occasion, Riemann est conduit à utiliser des notions qui ressortissent, à l'*analysis situs*. Cet événement est doublement important. D'abord, parce que, dès maintenant la topologie cesse d'être un simple jeu de l'esprit pour devenir un auxiliaire précieux dans cette théorie des fonctions, à laquelle le XIXe siècle finissant consacrera le meilleur de ses forces. Ensuite, parce que dorénavant les problèmes topologiques vont être attaqués sur deux fronts; celui de la géométrie et celui de l'analyse.

Voyons pourquoi Riemann a besoin de topologie, et ce que la topologie lui doit.

1. Etudiant l'expression $\int_c f(z)\,dz$, où f est une fonction holomorphe sur un domaine et c une courbe fermée, il montre qu'elle est nulle, pourvu que c soit contour total d'une portion de surface. Lorsque c ne remplit pas cette condition, le théorème conserve sa valeur grâce à l'introduction d'une ligne nouvelle — la section transverse — qui joint deux points situés sur chacune des frontières. En pratique, cette situation se présente quand la fonction possède une singularité, que l'on exclut à l'aide d'une courbe fermée. Ainsi apparaît en théorie des fonctions une classification des surfaces: surfaces simplement connexes celles qui ne nécessitent aucune section transverse, doublement connexes celles qui demandent une section, etc.

2. Confronté au difficile problème posé par les fonctions multiformes, Riemann eut l'idée d'attacher à chacune d'elles une surface qu'on appelle aujourd'hui la surface de Riemann de la fonction. Aux propriétés topologiques de la surface de Riemann correspondent pour les fonctions des