3. Démonstration du théorème

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2. Cas de $\bigwedge_c^n(\mathbf{R}_+^n)$. On définit I_0 en convenant que $I_0 = 0$. Définissons $\bar{I}_1$. Soit $\alpha = g(x)\,dx$ où g est à support dans $\mathbf{R}_+^n$ et soit $b(x)$ une fonction C^∞, positive ou nulle, à support dans l'intervalle $[1, 2]$ et telle que $\int_0^\infty b(t)\,dt = 1$.

On pose $\bar{\omega} = b(x)\,dx$ et

$$\bar{I}_1(\alpha) = \int_0^x \left(g(t) - b(t)\int \alpha\right) dt\,.$$

On a bien

$$d\bar{I}_1(\alpha) = \alpha - \bar{\omega}\int \alpha\,.$$

Pour $n > 1$, on définit $\bar{I}_n$ par récurrence en posant

$$\bar{I}_n(\alpha) = \bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge dx_n + (-1)^{n-1}\,\omega'\left\{\int_{-\infty}^{x_n}\left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \alpha_1(t) - b(t)\int_{\mathbf{R}_+^n} \alpha\right) dt\right\}$$

où $\omega' = b(x_1)\,b(x_2)\ldots b(x_{n-1})\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}\,.$

Cet opérateur transforme les formes à support compact, en formes à support compact. On vérifie que $d\bar{I}_n\alpha = \alpha - \bar{\omega}\int\alpha$ et comme avant on remarque que l'on peut prendre ω quelconque à support dans l'intérieur $\mathbf{R}_+^n$ telle que $\int\omega = 1$, et construire $I_n(\alpha) = \bar{I}_n(\alpha) - \bar{I}_n(\omega)\int\alpha$.

Montrons que si $\alpha \in \bigwedge_c^n(\mathbf{R}_+^n)$ alors $I_n(\alpha)(x) = 0$ pour tout $x \in \partial\mathbf{R}_+^n$. Ceci est vrai pour $n = 0, 1$. Supposons le vrai pour $(n-1)$. La formule définissant I_n montre que

$I_n(\alpha)(x) = I_{n-1}(\alpha_1)(x) \wedge dx^n$ pour tout $x \in \partial\mathbf{R}_+^n$, mais $I_{n-1}(\alpha_1)(x) = 0$ par hypothèse de récurrence.

3. Démonstration du théorème

(ii) implique (iii). Suivant Moser [1], on définit une famille à 1-paramètre de champs de vecteurs u_t en posant

$$(*)\qquad i(u_t)\tau_t + \alpha_t = 0,$$

$i(u_t)\,\tau_t$ étant le produit intérieur de τ_t et u_t; c'est la $(n-1)$-forme définie par

$(i(u_t)\,\tau_t)(\xi_1 \ldots \xi_{n-1}) = \tau_t(u_t, \xi_1 \ldots \xi_{n-1})$ pour $n-1$ champs de vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

Comme $\alpha_t \,|\, \partial M = 0$ et $\tau_t \neq 0$, on a $u_t \,|\, \partial M = 0$ et l'équation $\frac{d}{dt}(\Phi_t) = u_t.\ \Phi_t$ admet une solution Φ_t telle que $\Phi_0 = \mathrm{id}$; $\Phi_t \,|\, \partial M = \mathrm{id}$.

On a: $\dfrac{d}{dt}(\Phi_t^* \tau_t) = \Phi_t^*\left(\dfrac{\partial \tau_t}{\partial t} + d\left[i(u_t)\tau_t\right]\right) = 0$

par la condition *(ii)* et l'équation (*) (voir Sternberg [2] et Moser [1].)

(iii) implique (i) trivialement.

(i) implique (ii). Soit $(U_i)_{i=0\ldots m}$ le recouvrement du lemme 1, φ_i les cartes correspondantes; (λ_i) une partition de l'unité subordonnée à (U_i). Posons $\beta_i^t = (\varphi_i^{-1})^* (\lambda_i \dot{\tau}_t)$ avec $\dot{\tau}_t = \partial \tau_t / \partial t$; c'est une n-forme à support compact dans $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{R}_+^n$.

Soit ω une n-forme à support compact dans $\mathbf{R}_+^n \subset \mathbf{R}^n$ telle que $\int \omega = 1$ et dont le support soit contenu dans l'intérieur de $\mathbf{R}_+^n$.

Alors $\omega_i = (\varphi_i^{-1})^* (\varphi_o^* \omega)$ a un support qui ne rencontre pas $\partial \mathbf{R}_+^n$ et $\int \omega_i = 1$.

D'après le lemme 2, on a

$$d\, I_n^i \beta_i^t = \beta_i^t - \omega_i \int \beta_i^t \text{ dans } \varphi_i(U_i) \subset \mathbf{R}^n$$

où I_n^i est l'opérateur du lemme2 construit à partir de ω_i. Donc

$$\varphi_i^* d\, I_n^i \beta_i^t = \varphi_i^* \beta_i^t - \varphi_i^* \omega_i \int \beta_i^t \text{ dans } U_i,$$
$$d(\varphi_i^* I_n^i \beta_i^t) = \lambda_i \dot{\tau}_t - \bar{\omega} \int \beta_i^t \text{ où } \bar{\omega} = \varphi_o^* \omega;$$

on pose $\alpha_i^t = \varphi_i^* (I_n^i \beta_i^t)$ et $\alpha_t = \sum_i \alpha_i^t$;

on a $\quad d\alpha_t = \sum_i \lambda_i \dot{\tau}_t - \bar{\omega} \sum_i \int \beta_i^t = \dot{\tau}_t - \bar{\omega} \int \dot{\tau}_t = \dot{\tau}_t$

par la condition *(i)*.

Comme le support de ω_i ne rencontre pas $\partial \mathbf{R}_+^n$, d'après le lemme 2, on a $(I_n^i \beta_i^t) \mid \partial \mathbf{R}_+^n = 0$, donc α_i^t et par conséquent α^t s'annule sur ∂M.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Moser, J. On volume elements on a manifold, *AMS. Trans. 120* (1965), pp. 280-296.

[2] Sternberg, S. *Lectures on Differential Geometry*, Prentice Hall — Englewood Cliffs, N. J. (1964).

[3] de Rham, G. Forme differenziali et loro-integrali, *C.I.H.E. 2e ciclo*, *Saltino di Vallombrosa*, *Agosto 1960*, *Roma*, p. 21.

[4] Palais, R. Local triviality of the restriction map for imbeddings, *Comm. Math. Helv. 34* (1960), pp. 305-312.

(Reçu le 24 juin 1973)

A. Banyaga
Institut de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
1211 Genève 24