§2. — Autres théorèmes de comparaison

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

est exacte et ker $(D,\mathscr{H})$ est localement isomorphe à $\mathbf{C}^m$ (théorème d'existence et d'unicité usuel); par suite l'application $D:\mathscr{H}(\Omega^*)\to\mathscr{H}(\Omega^*)$ a pour indice $m(1-b_*^1)$, $b_*^1 = \dim H^1(\Omega^*, \mathbf{C})$.

D'autre part, pour chaque $a \in Z$, soit Δ_a un disque ouvert centré en a, avec $\Delta_a \in \Omega$, $\Delta_a \cap \Delta_b = \phi$ si $a \neq b$. Comme $H^1(\Omega,\mathscr{H}) = 0$, on a

$$\mathscr{H}(\Omega^*)/\mathscr{H}(\Omega) \simeq \bigoplus_{a\in\Delta_a} \mathscr{H}(\Delta_a^*)/\mathscr{H}(\Delta_a), \text{ avec } \Delta_a^* = \Delta_a - \{a\}.$$

On a $\chi(D,\mathscr{H}(\Delta_a^*)) = 0$ par le raisonnement précédent, et $\chi(D,\mathscr{H}(\Delta_a)) = m - v(a_m, a)$ (par passage à la limite projective, à partir de 1.2.) On conclut alors en utilisant la suite exacte

$$0 \to \mathscr{H}(\Omega) \to \mathscr{H}(\Omega^*) \to \mathscr{H}(\Omega^*)/\mathscr{H}(\Omega) \to 0.$$

§ 2. — Autres théorèmes de comparaison

Nous reprenons les hypothèses de la proposition 1.1.

Théorème 2.1.

a) *L'application* $D : K \to K$ *est à indice et l'on a* $\chi(D, K) = -i(D)$.

b) *L'application* $D : \hat{K} \to \hat{K}$ *est à indice, et l'on a* $\chi(D, \hat{K}) = 0$.

c) *On a* coker $(D, \hat{K}/K) = 0$ *et* dim ker $(D, \hat{K}/K) = i(D)$.

L'assertion c) résulte de 1.4 et de l'isomorphisme naturel $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \hat{K}/K$. Les assertions a) et b) vont résulter du lemme suivant:

Lemme 2.2. L'application $D : K/\mathcal{O} \to K/\mathcal{O}$ *a pour indice* $-\sup[p - v(a_p)]$.

Désignons en effet par K_{-p} l'ensemble des éléments f de K, avec $v(f) \geqslant -p$; un calcul analogue à celui de la proposition 1.3 fait avec les puissances négatives de x montre qu'on a, avec $n = \sup[p - v(a_p)]$: $DK_{-p} \subset K_{-p-n}$, et que, pour p assez grand, l'application $D : K/K_{-p} \to K/K_{-p-n}$ est un isomorphisme. Le lemme en résulte immédiatement. L'assertion a) résulte alors de 1.1 et 2.2 en utilisant la suite exacte $0 \to \mathcal{O} \to K \to K/\mathcal{O} \to 0$; l'assertion b) résulte de manière analogue de 1.3 et 2.2, et de l'isomorphisme $K/\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \hat{K}/\hat{\mathcal{O}}$.

Soit S_n l'espace des fonctions holomorphes dans la couronne $0 < |x| < r$, et $S = \bigcup_{r>0} S_r$. On a le résultat suivant (cf. Deligne [1], prop. II.6.20).

Théorème 2.3. Même énoncé que 2.1 *avec* $\hat{K}$ *remplacé par* S.

L'assertion a) coïncide avec celle de 2.1. D'autre part, il résulte de la remarque 1.7 que r assez petit, on a $\chi(D, S_r) = 0$; le fait qu'on ait $\chi(D, S) = 0$ s'en déduit par passage à la limite inductive.

Pour démontrer l'assertion coker $(D, S/K) = 0$, il suffit de démontrer ceci: désignons par K_r le sous-espace de S_r formé des fonctions méromorphes en 0; alors, pour r assez petit, on a $S_r = D\, S_r + K_r$; or cela résulte du fait que K_r est dense dans S_r (muni de sa topologie usuelle de Fréchet) et de ce que $D\, S_r$ est de codimension finie dans S_r, donc fermé d'après un lemme classique.

L'assertion « dim ker $(D, S/K) = i(D)$ » se démontre alors en utilisant les précédents et la suite exacte de cohomologie, comme l'assertion 1.4.2; d'où le théorème.

Par exemple, si $D\, f = x^2 \dfrac{df}{dx} - f$, une base de ker $(D, S/K)$ est $f_1 = e^{-1/x}$; comme f_1 provient d'un élément de ker (D, S) l'application coker $(D, K) \to$ coker (D, S) est ici bijective.

§ 3. — Extension aux systèmes

Il sera commode ici de prendre les systèmes d'abord sous la forme $F \to x \dfrac{dF}{dx} - MF$, $F \in K^m$ (ou $\hat{K}^m$, ou S^m), M matrice carrée à coefficients dans K [on écrira: $M \in \mathrm{End}(K^m)$].

Soit $A \in \mathrm{Gl}(m, K)$, i.e. $A \in \mathrm{End}(K^m)$, A inversible; la transformation $F = A\, G$ transforme D en D' avec $D'\, G = x \dfrac{dG}{dx} - N\, G$, $N = A^{-1} M A - x A^{-1} \dfrac{dA}{dx}$. Rappelons le résultat suivant (voir Deligne [1] lemme II.1.3).

Théorème 3.1. Il existe $A \in \mathrm{Gl}(m, K)$ *tel que* N *ait la forme suivante*

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ \lambda_0 & . & . & . & \lambda_{m-2} & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$