Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1974)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Autor: Malgrange, Bernard

Kapitel: §3. — Extension aux systèmes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46900

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Théorème 2.3. Même énoncé que 2.1 *avec* $\hat{K}$ *remplacé par* S.

L'assertion a) coïncide avec celle de 2.1. D'autre part, il résulte de la remarque 1.7 que r assez petit, on a $\chi(D, S_r) = 0$; le fait qu'on ait $\chi(D, S) = 0$ s'en déduit par passage à la limite inductive.

Pour démontrer l'assertion coker $(D, S/K) = 0$, il suffit de démontrer ceci: désignons par K_r le sous-espace de S_r formé des fonctions méromorphes en 0; alors, pour r assez petit, on a $S_r = D\,S_r + K_r$; or cela résulte du fait que K_r est dense dans S_r (muni de sa topologie usuelle de Fréchet) et de ce que $D\,S_r$ est de codimension finie dans S_r, donc fermé d'après un lemme classique.

L'assertion « dim ker $(D, S/K) = i(D)$ » se démontre alors en utilisant les précédents et la suite exacte de cohomologie, comme l'assertion 1.4.2; d'où le théorème.

Par exemple, si $D\,f = x^2 \dfrac{df}{dx} - f$, une base de ker $(D, S/K)$ est $f_1 = e^{-1/x}$; comme f_1 provient d'un élément de ker (D, S) l'application coker $(D, K) \to$ coker (D, S) est ici bijective.

§ 3. — Extension aux systèmes

Il sera commode ici de prendre les systèmes d'abord sous la forme $F \to x\dfrac{d\,F}{d\,x} - M\,F$, $F \in K^m$ (ou $\hat{K}^m$, ou S^m), M matrice carrée à coefficients dans K [on écrira: $M \in \mathrm{End}\,(K^m)$].

Soit $A \in \mathrm{Gl}\,(m, K)$, i.e. $A \in \mathrm{End}\,(K^m)$, A inversible; la transformation $F = A\,G$ transforme D en D' avec $D'\,G = x\dfrac{d\,G}{d\,x} - N\,G$, $N = A^{-1}\,M\,A - x\,A^{-1}\dfrac{d\,A}{d\,x}$. Rappelons le résultat suivant (voir Deligne [1] lemme II.1.3).

Théorème 3.1. Il existe $A \in \mathrm{Gl}\,(m, K)$ *tel que* N *ait la forme suivante*

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ \lambda_0 & . & . & . & \lambda_{m-2} & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

Soit alors Δ l'opérateur différentiel défini par

$$\Delta f = \partial^m f - \lambda_{m-1} \partial^{m-1} f \ldots - \lambda_0 f, \text{ avec } \partial = x\frac{d}{dx};$$

il est immédiat que D' est « équivalent » à Δ et, de façon plus précise, qu'on a le résultat suivant:

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "u"'] & K \arrow[d, "v"] \\ K^m \arrow[r, "D'"] & K^n \end{tikzcd}$$

avec $u(f) = (f_0, \ldots, f_{m-1})$, $v(g) = (0, \ldots, 0, g)$; alors ce diagramme induit un isomorphisme entre le noyau de Δ et le noyau de D' d'une part, le conoyau de Δ et le conoyau de D' d'autre part; le même résultat est encore vrai avec K remplacé par $\hat{K}$, S, etc.

Définissons alors l'irrégularité de Δ par la formule $i(\Delta) = i(x^k \Delta)$, k un entier tel que $x^k \Delta$ soit à coefficients holomorphes. Cela ne dépend visiblement pas de k, et on laisse le lecteur vérifier la formule suivante

$$i(\Delta) = \sup\left(0, \sup -v(\lambda_p)\right) \tag{3.2}$$

Définissons ensuite l'irrégularité de D par $i(D) = i(\Delta)$. Les théorèmes 2.1 et 2.3 entraînent immédiatement le résultat suivant

Théorème 3.3.

a) *L'application* $D : K^m \to K^m$ *est à indice et l'on a* $\chi(D, K) = -i(D)$.

b) *L'application* $D : \hat{K}^m \to \hat{K}^m$ *est à indice et l'on a* $\chi(D, \hat{K}) = 0$.

c) *On a* coker $(D, \hat{K}^m / K^m) = 0$ *et* dim ker $(D, \hat{K}^m / K^m) = i(D)$.

d) *Mêmes énoncés avec* $\hat{K}$ *remplacé par* S.

Ce théorème montre en particulier, que $i(D)$ ne dépend que de D, et non pas du choix de A dans 3.1; nous donnerons une démonstration algébrique de ce résultat dans le prochain exposé.

Rappelons maintenant que, suivant une définition classique, l'origine est un point singulier régulier de D s'il existe un $A \in \mathrm{Gl}(m, K)$ tel que $N = A^{-1} M A - x A^{-1} \dfrac{dA}{dx}$ n'ait pas de pôle. Cela est classiquement

équivalent à la propriété suivante: n'importe quelle détermination d'une (ou de toute) matrice fondamentale de P est à croissance polynomiale en $\frac{1}{x}$ au voisinage de 0; ceci équivaut encore au fait qu'on a $P = Q \exp (C \log x)$, avec Q à coefficients méromorphes, i.e. $Q \in \mathrm{Gl}(m, K)$.

Proposition 3.4. Pour que 0 *soit un point singulier régulier de* D *il faut et il suffit qu'on ait* $i(D) = 0$.

Supposons qu'on ait $i(D) = 0$, et soit A comme au théorème 3.1; alors $i(\Delta) = 0$, donc, d'après la formule 3.2, les λ_p n'ont pas de pôle; donc N n'a pas de pôle.

Pour démontrer la réciproque, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 3.5. Supposons que M *n'ait pas de pôle; alors l'application* $D : \hat{\mathcal{O}}^m \to \hat{\mathcal{O}}^m$ *est d'indice nul.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 1.3. Soit F_k un vecteur de $\mathbf{C}^m$; on a $D(F_k x^k) = [kI - M(0)]\, x^k +$ (termes de degré $> k$); pour k assez grand, disons $k \geqslant k_0$, $kI - M(0)$ est inversible; de là, il résulte que l'application $D : \mathfrak{m}^k(\mathcal{O}^m) \to \mathfrak{m}^k(\mathcal{O}^m)$ est bijective pour $k \geqslant k_0$. Le lemme en résulte immédiatement.

Sous la même hypothèse que M n'ait pas de pôle, la proposition 3.6, ci-dessous, montre que $D : \mathcal{O}^m \to \mathcal{O}^m$ est encore d'indice nul; donc, l'indice de $D : \hat{\mathcal{O}}^m / \mathcal{O}^m \to \hat{\mathcal{O}}^m / \mathcal{O}^m$ est nul; en vertu de l'isomorphisme $\hat{\mathcal{O}} / \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \hat{K} / K$, le théorème 3.3 c) nous montre alors qu'on a $i(D) = 0$; d'où la proposition.

Par la suite, il sera nécessaire aussi d'envisager des systèmes sous la forme un peu plus générale suivante: H étant une matrice diagonale à coefficients entiers $(h_1, \ldots, h_m)$ on pose $DF = x^H \frac{dF}{dx} - MF$, avec $M \in \mathrm{End}(K^m)$. Par définition, on prendra $i(D) = i(x^{I-H}D)$, moyennant quoi le théorème 3.3 est encore vrai pour D.

On a aussi la proposition suivante.

Proposition 3.6. Si M *est sans pôle, et les* h_i *positifs, alors* $D : \mathcal{O}^m \to \mathcal{O}^m$ *a pour indice* $(h_1 + \ldots + h_m - m)$ *et* $D : \hat{\mathcal{O}}^m \to \hat{\mathcal{O}}^m$ *a pour indice* $i(D) + (h_1 + \ldots + h_m - m)$.

La première assertion se démontre comme la proposition 1.1. La seconde résulte de là, du fait que le théorème 3.3 s'applique à D, et de l'isomor-

phisme $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \to \hat{K}/K$. A noter aussi que, d'après la première assertion, on a dim ker $(D, \mathcal{O}^m) \geqslant h_1 + \ldots + h_m - m$ (théorème de Perron pour les systèmes).

§ 4. — Remarques diverses

a) *Equations dépendant d'un paramètre*

La théorie des équations différentielles dépendant d'un paramètre présente de nombreuses difficultés. Nous donnerons seulement ici un énoncé simple, qui « relativise » la proposition 1.1, et cela sans chercher les hypothèses minimum nécessaires. Soit Z une variété analytique complexe connexe, et soit D l'opérateur différentiel « dépendant du paramètre $z \in Z$ »: $D = \sum_0^m a_p \frac{d^p}{dx^p}$, $a_p \in \mathscr{H}(\Delta \times Z)$, Δ le disque unité ouvert; supposons $a_m \neq 0$; soit $V \subset \Delta \times Z$ l'ensemble des zéros de a_m, et supposons que la projection $V \to Z$ induite par la projection naturelle $\pi : \Delta \times Z \to Z$ soit propre. Soit $\mathscr{K}$ le complexe $0 \to \mathscr{H}_{\Delta \times Z} \to \mathscr{H}_{\Delta \times Z} \to 0$, avec $\mathscr{H}_{\Delta \times Z}$ désignant le faisceau des fonctions holomorphes sur $\Delta \times Z$.

Proposition 4.1. Le complexe $\pi_* \mathscr{K}$ est à cohomologie $\mathscr{H}_Z$-cohérente. Autrement dit, les faisceaux associés aux préfaisceaux $U \to \ker(D, \mathscr{H}(\Delta \times U))$ et $U \to \operatorname{coker}(D, \mathscr{H}(\Delta \times U))$, U ouvert de Z, sont $\mathscr{H}_Z$-cohérents. Esquissons la démonstration: on peut, en restreignant Z, supposer que V est contenu dans $\Delta_r \times Z$, avec $0 < r < 1$, Δ_r le disque fermé de rayon r; prenons r' vérifiant $r < r' < 1$. On démontre facilement, à l'aide du théorème d'existence, d'unicité, et de dépendance d'un paramètre pour les équations différentielles que le préfaisceau associé au faisceau $U \to (\ker D, \mathscr{H}(\Delta \times U))$ [resp. $U \mapsto (\operatorname{coker} D, \mathscr{H}(\Delta \times U))$] est isomorphe au noyau (resp. ou conoyau) du morphisme de faisceaux $\mathscr{H}_Z(B^m(\Delta_{r'})) \xrightarrow{D} \mathscr{H}_Z(B^0(\Delta_{r'}))$, ici, E étant un Banach, on note $\mathscr{H}_Z(E)$ le faisceau des fonctions holomorphes sur Z à valeurs dans E. Nous sommes alors ramenés à la situation classique de perturbation analytique d'un opérateur à indice dans des espaces de Banach; d'où le résultat.

On a aussi des énoncés analogues avec par exemple Z espace analytique ou espace topologique séparé, ou variété différentielle (dans ces deux derniers cas, il faudrait remplacer l'énoncé, comme d'habitude en géométrie analytique relative, par un énoncé de pseudo-cohérence pour