

§7. — Le cas C^∞ : énoncé du théorème principal

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

formelles qui précèdent, se ramener au cas où l'on a $M = M_0 + M_\infty$, M_0 constante et M_∞ plate.

Enfin, il suffit de trouver F à droite de 0 et tendant vers 0 ainsi que toutes ses dérivées en 0 (nous dirons qu'une telle F est « plate à droite en 0 »); on fera ensuite la même opération à gauche, en changeant x en $-x$.

Posons alors $F = \exp(M_0 \log x) F_1$, $G = \exp(M_0 \log x) G_1$; il est clair par l'expression explicite de $\exp(M_0 \log x)$ pour M_0 triangulaire, que F et F_1 seront simultanément plates à droite en 0, et de même pour G et G_1 . On est ramené à l'équation

$$x \frac{dF_1}{dx} - N_\infty F_1 = G_1, \text{ avec } N_\infty = \exp(-M_0 \log x) M_\infty \exp(M_0 \log x),$$

donc N_∞ est plate à droite en 0; en divisant par x , on est ramené au théorème d'existence et d'unicité usuel. D'où la proposition.

Corollaire 6.4. Soit $D = x \frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \text{End}(K \mathcal{E}^m)$, et supposons que 0 soit un point singulier régulier. Il existe alors $A \in \text{Gl}(m, K \mathcal{E})$ tel que la transformation $F = AF'$ transforme D en $D' = x \frac{d}{dx} - N$, avec N constant.

Comme ci-dessus, on peut supposer $M = M_0 + M_\infty$, avec M_0 constant, M_∞ plat. Considérons alors l'équation

$$x \frac{dA}{dx} = MA - AM_0, \text{ avec } A \text{ à coefficients dans } \mathcal{E}, A(0) = I.$$

Cette équation admet pour solution formelle I ; d'après 6.3, elle admet donc une solution A , avec $\hat{A} = I$; d'où le résultat.

On déduit immédiatement de ce corollaire, l'expression générale d'une matrice fondamentale d'un système à points singuliers réguliers, et à coefficients \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0.

§ 7. — LE CAS \mathcal{C}^∞ : ÉNONCÉ DU THÉORÈME PRINCIPAL

Soit k un entier; soit d'autre part Φ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ des $m + 1$ variables x et $Y = (y_1, \dots, y_m)$, définie au voisinage de $(0, Y^0)$, et à valeurs dans \mathbf{R}^m ; notons $\hat{\Phi}$ son développement de Taylor en $(0, Y^0)$.

Théorème 7.1. Supposons qu'il existe $H \in \hat{\mathcal{O}}^m$, à coefficients réels, avec $H(0) = Y^0$, qui vérifie l'équation $x^{k+1} \frac{dH}{dx} = \hat{\Phi}(x, H)$. Alors il existe $F \in \mathcal{E}^m$, à valeurs réelles vérifiant $\hat{F} = H$, $x^{k+1} \frac{dF}{dx} = \Phi(x, F)$.

Nous allons d'abord indiquer comme ce théorème peut être déduit d'un lemme sur les équations linéaires, lemme qui sera démontré dans les paragraphes suivants. Soient $a > 0$, et p entier ≥ 0 ; nous désignerons par $B(p; a)$ l'espace des fonctions f continues sur $[0, a]$ à valeurs complexes, et telles que $x^{-p} f(x)$ soit bornée sur cet intervalle; on posera $|f|_p = \sup_{x \in]0, a]} |x^{-p} f(x)|$. Pour $f \in B(p; a)^m$, $F = (f_1, \dots, f_m)$ on posera par exemple $|F|_p = \sup |f_i|_p$.

Lemme fondamental 7.2. Soit $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \text{End}(\mathcal{E}^m)$ et $k \in \mathbf{Z}$; on peut trouver $l \in \mathbf{Z}$, $p_0 \in \mathbf{N}$, et $a_0 > 0$, possédant les propriétés suivantes: Pour $0 < a \leq a_0$, il existe une application linéaire $K : B(p_0, a)^m \rightarrow B(p_0 - l, a)^m$ inverse à droite de D (i.e. $DKG = G$), et telle que, pour tout $p \geq p_0$, la restriction de K à $B(p, a)^m$ soit une application linéaire continue $B(p, a)^m \rightarrow B(p - l, a)^m$.

Remarquons que l'on peut aussi supposer la norme de $K : B(p; a)^m \rightarrow B(p - l; a)^m$ majorée par une quantité indépendante de a (mais non de p), pourvu qu'on ait supposé $p_0 - l \geq 0$, ce qu'on fera par la suite; en effet, supposons K obtenu pour $a = a_0$, et notons le K_{a_0} ; pour obtenir un K_a , on peut opérer ainsi: soit \tilde{G} le prolongement à $]0, a_0]$ d'une fonction G continue sur $]0, a]$ obtenu en posant $\tilde{G}(x) = G(a)$, $a \leq x \leq a_0$; on a évidemment $|\tilde{G}|_p = |G|_p$, et l'on posera simplement $K_a G =$ (restriction à $]0, a]$ de $K_{a_0} \tilde{G}$).

Montrons comment ce théorème 7.1 résulte du lemme précédent (appliqué aux fonctions à valeurs réelles). Comme au § 6, on se ramène d'abord au cas où $Y^0 = 0$, $H = 0$; on a alors $\hat{\Phi}(x, 0) = 0$, et on cherche F plat; il suffit de trouver F à droite de 0 (on le trouvera ensuite à gauche de la même manière, en changeant x en $-x$); écrivons alors $\Phi(x, Y) = \hat{\Phi}(x, 0) + M(x)Y + \Psi(x, Y)(Y, Y)$ avec $M \in \text{End}(\mathcal{E}^m)$, Ψ une forme quadratique à coefficients $\mathcal{C}^\infty(x, Y)$; on applique le lemme précédent, et l'on cherche $F \in B(p, a)^m$ (p et a à déterminer), solution de l'équation $F = K [\hat{\Phi}(x, 0) + \Psi(x, F)(F, F)]$.

Notons $L(F)$ le second membre de l'équation précédente, et choisissons $p \geq p_0$, et vérifiant $p - l \geq 1$. Supposons $a \leq 1$; on a alors, puisque $\Phi(x, 0)$ est plat $|\Phi(x, 0)|_{p+1} \leq C(a)$, avec $C(a) \rightarrow 0$ si $a \rightarrow 0$; d'autre part, si $|F|_p \leq 1$, on a $|F|_0 \leq 1$ donc $\Psi(X, F)$ est borné, et par suite on a, avec C indépendant de a :

$$|(\Psi(x, F)(F, F))|_{2p} \leq C |F|_p^2, \text{ donc } |\Psi(x, F)(F, F)|_{p+l} \leq C a |F|_p^2$$

il résulte de là, et de la remarque qui suit l'énoncé du lemme que, pour a assez petit, L envoie la boule unité Σ de $B^m(p, a)$ dans elle-même.

Un calcul analogue montre que pour $|F|_p \leq 1, |G|_p \leq 1$, on a

$$|\Psi(x, F)(F, F) - \Psi(x, G)(G, G)|_{2p} \leq C |F - G|_p$$

d'où

$$|\Psi(x, F)(F, F) - \Psi(x, G)(G, G)|_{p+l} \leq C a |F - G|_p$$

on en déduit que, pour a assez petit, L est contractante sur Σ ; alors l'équation $F = L(F)$ a une solution et une seule dans Σ ; comme F vérifie

$$x^{k+1} \frac{dF}{dx} = \Phi(x, F) \text{ dans }]0, a], F \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0, a]. \text{ Reste à}$$

montrer que F est plate en 0.

Tout d'abord, montrons que $x^{-q} F$ est borné sur $]0, a]$, quel que soit $q \geq p$; ceci est vrai pour p , donc par récurrence, il suffit de le montrer pour $q + 1$, en supposant le résultat établi pour q ; or, on a alors $F \in B(q, a)^m$, donc $\Psi(x, F)(F, F) \in B(2q, a)^m$; a fortiori $\Psi(x, F) \in B(q+l+1, a)^m$ et, par hypothèse $x, \Phi(x, 0) \in B(q+l+1, a)^m$; donc $L(F) \in B(q+1, a)^m$, ce qui démontre le résultat; en utilisant l'équation différentielle $x^{k+1} \frac{dF}{dx} =$

$\Phi(x, 0) + M(x)F + \Psi(x, F)(F, F)$, et le résultat précédent, on voit que

$x^{-q} \frac{dF}{dx}$ est encore borné pour tout q ; en dérivant l'équation, on voit que

$x^{-q} \frac{d^2 F}{dx^2}$ est encore borné pour tout q , et ainsi de suite. Par conséquent

modulo le lemme 7.2, le théorème 7.1 est complètement démontré.

Proposition 7.3. Si D a un point singulier régulier en 0, le lemme 7.2. est vrai.

Il est clair que, si le lemme garde un sens lorsqu'on suppose $M \in \text{End}(K \mathcal{E}^m)$, et que d'autre part, on ne change rien (sauf les valeurs éventuelles de p_0 et 1) en multipliant D par x^p ($p \in \mathbb{Z}$) et en faisant une

transformation du type $F = A F_1, G = A G_1$, avec $A \in \text{Gl}(m, K \mathcal{E})$. D'après le corollaire (6.4), on peut donc supposer $k = 1$, et M constant; on peut même supposer que M est triangulaire inférieure; alors en raisonnant par récurrence, on est ramené à démontrer le résultat lorsque D est l'opérateur différentiel scalaire $x \frac{d}{dx} - \lambda, \lambda \in \mathbf{C}$; ce cas peut être laissé au lecteur, (ici, on pourra même prendre $l = 0$, mais peu importe).

§ 8. — LE CAS FAVORABLE

La proposition suivante est classique:

Proposition 8.1. Avec les notations du lemme 7.2, supposons $k \geq 1$, et supposons que les valeurs propres λ_j de $M(0)$ vérifient $\text{Re}(\lambda_j) \neq 0$. Alors le lemme 7.2 est vrai avec $l = 0$.

Démonstration

i) Il suffit de démontrer la proposition pour $M = M(0)$; en effet, supposons le résultat établi dans ce cas; soit $K^0 : B(p; a)^m \rightarrow B(p; a)^m$ l'inverse à droite de $x^{k+1} \frac{d}{dx} - M(0)$ (K^0 dépend de a , mais non de $p \geq p_0$); on pose alors $M(x) = M(0) + x N(x), N \in \text{End}(\mathcal{E}^m)$, et on note L l'application $F \mapsto x N K^0 F$; il suffit de trouver K^1 , inverse de $I - L$, car alors $K^0 K^1 = K$ sera un inverse à droite de D .

Or, pour $a \leq a_0$, on a $|K^0 F|_{p_0} \leq C |F|_{p_0}$ (cf. remarque suivant l'énoncé du lemme 7.2), d'où, par un calcul analogue à ceux du § 7: $|L F|_{p_0} \leq C' a |F|_{p_0}$; en choisissant a pour qu'on ait $C' a < 1$, on voit que la série $K^1 = \sum L^n$ converge dans l'espace des applications linéaires continues de $B(p_0; a)^m$ dans lui-même.

Montrons par récurrence sur $p \geq p_0$ que K^1 envoie continuellement $B(p; a)^m$ dans lui-même; supposons donc le résultat acquis pour $p - 1$; l'équation $H = K^1 G$ équivaut à $H = G + L H$; si G parcourt un borné de $B(p, a)^m$, H parcourt un borné de $B(p-1; a)^m$ par hypothèse de récurrence; donc $L H = x N K^0 H$ parcourt un borné de $B(p; a)^m$; donc $H = C + L H$ parcourt un borné de $B(p; a)^m$, ce qui démontre le résultat.

Il est alors clair que $K = K^0 K^1$ répond à la question; d'où la proposition.