

# §10. — Applications

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

le cas  $D_2$ , d'après la remarque précédente,  $r$  est entier, donc le procédé donné en  $D_2$  diminue  $i(D)$ .

Le lemme  $(C, i)$  et donc aussi le lemme fondamental, est ainsi complètement établi.

*Remarque.* Au lieu de faire une récurrence sur l'irrégularité  $i(D)$ , il aurait été tout aussi naturel (et même encore plus) d'utiliser a priori « l'irrégularité de Katz », i.e. le nombre  $r$  qui vient d'être introduit et qui mesure l'ordre minimum des pôles à considérer (voir à ce sujet Gérard-Levelt [1], et un article à paraître de Levelt).

## § 10. — APPLICATIONS

A. Le théorème 7.1 entraîne le théorème suivant, en apparence plus général:

*Théorème 10.1.* Soit  $\Phi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  des  $2m + 1$  variables  $x, Y = (y_1, \dots, y_m)$ , et  $Z = (z_1, \dots, z_m)$  au voisinage de  $0, Y^0, Z^0$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}^m$ ; supposons qu'il existe une série formelle  $H \in \hat{\mathcal{O}}^m$  (à coefficients réels) vérifiant  $H(0) = Y^0, \frac{dH}{dx}(0) = Z^0$ , et  $\hat{\Phi}(x, H, \frac{dH}{dx}) = 0$ ; supposons enfin que la matrice  $\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial Z}(x, H(x), \frac{dH}{dx})$  soit inversible sur  $\hat{K}$  (i.e. appartienne à  $\text{Gl}(m, \hat{K})$ ); alors, il existe  $F \in \mathcal{E}^m$ , à valeurs réelles vérifiant  $\hat{F} = H, \Phi(x, H, \frac{dH}{dx}) = 0$ .

La réduction de ce résultat au cas (7.1) se fait suivant une méthode habituelle dans des questions voisines.

a) On traite d'abord le cas où l'on a  $\Phi(x, Y, Z) = \Psi(x, Y)Z - \chi(x, Y)$ ,  $\Psi$  une matrice d'ordre  $m$  à coefficients  $\mathcal{C}^\infty$ ; pour cela, on se ramène au cas où  $H = 0$ , donc  $Y^0 = Z^0 = 0$ ; on a alors la situation suivante:  $\chi(x, 0)$  est plat, et  $\Psi(x, 0)$  est inversible dans  $K\mathcal{E}$ ; il existe donc  $M \in \text{End}(\mathcal{E}^m)$  et  $k \in \mathbf{N}$  tel qu'on ait  $M\Psi(x, 0) = x^k I$ ; posons alors  $F = x^k G$ ; on a  $M\Psi(x, x^k G) = x^k \Psi_1(x, G)$ , avec  $\Psi_1(x, 0) = I$ , donc  $\Psi_1(x, Y)$  inversible au voisinage de  $(0, 0)$  dans les matrices à coefficients  $\mathcal{C}^\infty$ ; on a aussi  $M\chi(x, x^k G) = x^k \chi_1(x, G)$ , avec  $\chi_1$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ; on est alors ramené à l'équation

$$x^k \frac{dG}{dx} = -k x^{k-1} G + \Psi_1^{-1}(x, G) \chi_1(x, G)$$

b) On ramène le cas général au précédent, par dérivation, en remplaçant l'équation initiale par le système

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx} - G = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, F, G) + \frac{\partial \Psi}{\partial Y}(x, F, G) G + \frac{\partial \Psi}{\partial Z}(x, F, G) \frac{dG}{dx} = 0 \end{cases}$$

B. Dans le cas linéaire, on a le théorème suivant

*Théorème 10.2.* Soit  $D = x^k \frac{dF}{dx} - M F$ , avec  $k \in \mathbf{N}$ ,  $M \in \text{End}(\mathcal{E}^m)$ ;

soit  $\mathcal{D}'$  l'espace des germes de distributions en 0 dans  $\mathbf{R}$ ; alors, on a  $D \mathcal{D}' = \mathcal{D}'$

Soit  $a > 0$ , assez petit, et soit  $I$  l'intervalle  $[-a, a]$ ; par dualité, il suffit de démontrer que l'application  $D' : \mathcal{D}'_I \rightarrow \mathcal{D}'_I$  est d'image fermée ( $\mathcal{D}'_I$  désignant l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support dans  $I$ ); d'après un lemme classique puisque  $\mathcal{D}'_I$  est un espace de Fréchet, il suffit de démontrer que  $D' \mathcal{D}'_I$  est de codimension finie dans  $\mathcal{D}'_I$ ; soit  $E$  l'espace des  $F \in \mathcal{C}^\infty(I)^m$  telles qu'on ait  $D' F \subset \mathcal{D}'_I$ ; d'après le théorème d'existence et d'unicité usuel,  $\mathcal{D}'_I$  est le sous-espace de  $E$  formé des  $F$  telles qu'on ait  $F(-a) = F(a) = 0$ , donc  $\mathcal{D}'_I$  est de codimension finie dans  $E$ , et il suffit de démontrer que  $D' E$  est de codimension finie dans  $\mathcal{D}'_I$ ; or, le théorème 7.1, joint au théorème usuel de prolongement des solutions d'une équation différentielle montre que  $D' E$  est l'ensemble des  $F \in \mathcal{D}'_I$  tels qu'on ait  $\hat{F} \in \hat{D}' \hat{\mathcal{O}}^m$ ; ceci joint au fait que  $D' : \hat{\mathcal{O}}^m \rightarrow \hat{\mathcal{O}}^m$  est à indice (proposition 3.6) et à la surjectivité de l'application  $\hat{\cdot} : \mathcal{D}'_I \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$ , entraîne le résultat cherché.

C. Le théorème 7.1 a été démontré indépendamment par Kouznetsov [1] qui en a donné une intéressante application à l'étude des « formes normales »

des systèmes différentiels. Disons qu'un système  $D = x \frac{d}{dx} - M$ ,

$M \in \text{End}(K \mathcal{E}^m)$  est « élémentaire » si l'on a  $M = \sum_{p=-k}^{-1} \lambda_p x^p I + M_0$ ,

avec  $M_0 \in \text{End}(\mathbf{C}^m)$  et  $\lambda_p \in \mathbf{C}$ ; on a alors le résultat suivant:

*Théorème 10.3 — (Kouznetsov). Soit  $D = x \frac{d}{dx} - M$ ,  $M \in \text{End}(K \mathcal{E}^m)$*

*un système différentiel. Par un changement de variables  $x = y^q$  ( $q$  entier  $\geq 0$ ) suivi d'une transformation  $F = A F_1$ ,  $A \in \text{Gl}(m, K \mathcal{E})$ , on peut réduire  $D$  à la forme « diagonale »*

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & D_p \end{pmatrix}$$

*les  $D_j$  étant élémentaires.*

Indiquons rapidement comment ce résultat peut se démontrer; tout d'abord, le théorème 7.1 permet de se réduire à démontrer le résultat analogue dans le cas formel, c'est-à-dire dans le cas où l'on remplace dans l'énoncé précédent  $\mathcal{E}$  par  $\hat{\mathcal{O}}$ , et  $K \mathcal{E}$  par  $\hat{K}$ . Dans ce dernier cas, le résultat dû à Turrittin, peut se démontrer par les mêmes arguments que ceux employés au § 9; d'ailleurs, ici, les choses se simplifient; il suffit d'une double récurrence sur  $m$  d'une part,  $i(D)$  (ou mieux encore, l'irrégularité de Katz) d'autre part; nous n'entrerons pas dans les détails.

Soit enfin  $\Delta$  un secteur angulaire fermé de sommet 0 dans  $\mathbf{C}$ , de mesure angulaire  $\mu(\Delta)$ ; désignons par  $\mathcal{A}(\Delta)$  l'espace des germes en 0 de fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Delta$ , et holomorphes dans l'intérieur de  $\Delta$ . D'après Turrittin et Wasow, les théorèmes 7.1 et 10.3 sont encore vrais lorsqu'on y remplace  $\mathcal{E}$  par  $\mathcal{A}(\Delta)$ , et  $K \mathcal{E}$  par  $K \otimes_{\hat{\mathcal{O}}} \mathcal{A}(\Delta)$  pourvu que  $\mu(\Delta)$  soit assez petit (pour le théorème 7.1, il suffit qu'on ait  $\mu(\Delta) < \frac{\pi}{k}$ ); à vrai dire, ces auteurs travaillent

avec des « fonctions holomorphes dans un secteur ouvert, admettant un développement asymptotique en 0 », et non avec  $\mathcal{A}(\Delta)$ , mais le lecteur vérifiera facilement qu'il s'agit là d'une modification inoffensive.

La démonstration, sous ces nouvelles hypothèses, est presque la même que la précédente, et même plus simple: en effet, on démontre directement 8.2 sous l'hypothèse «  $\lambda_j \neq 0$  » (voir Wasow [1]); pour établir 7.1, on n'a alors plus besoin de « systèmes standard », et il suffit d'une double récurrence sur  $(m, i(D))$ . La démonstration ainsi esquissée est d'ailleurs celle que donne Wasow à la simplification près qu'apporte la transformation de Katz. Quant aux énoncés relatifs au développement asymptotique des solutions d'une équation différentielle, ils sont une conséquence facile de cette version du théorème 10.3; nous laissons cette question au lecteur.