Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1974)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUIDISTRIBUTION DES VALEURS D'UNE FONCTION ANALYTIQUE GÉNÉRIQUE SUR UN ESPACE DE STEIN

Autor: Brown, Léon / Gauthier, P. M.

Kapitel: I. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46903

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ÉQUIDISTRIBUTION DES VALEURS D'UNE FONCTION ANALYTIQUE GÉNÉRIQUE SUR UN ESPACE DE STEIN [1]

par Léon BROWN et P. M. GAUTHIER

I. INTRODUCTION

Dans cet article nous verrons que les valeurs prises par une fonction analytique sont distribuées également, sauf pour un ensemble maigre de fonctions.

La topologie que nous employons pour les applications holomorphes est celle de la convergence uniforme sur les compacts. Pour les fonctions méromorphes nous considérons deux topologies: celle de la convergence uniforme sur les compacts et celle de convergence sphériquement uniforme sur compacts. Ces deux topologies coïncident sur les fonctions holomorphes.

Pour nous, la distribution des valeurs, s'entend au sens de Picard, c'est-à-dire sans se préoccuper de la croissance de la fonction en question. Une étude plus fine, genre Nevanlinna, a été faite [2], en se restreignant aux fonctions définies sur les boules.

Rappelons qu'on étudie une fonction qui est générique au sens topologique. Des recherches analogues ont déjà été faites (voir [7]) pour les fonctions génériques au sens probabiliste.

Il y a un troisième point de vue initié par M. P. Lelong [5], qui mérite attention. L'ensemble des fonctions analytiques peut être muni d'une structure complexe de dimension infinie. Un ensemble de fonctions est alors petit s'il existe une fonction plurisousharmonique qui prend la valeur moins infinie sur cet ensemble. Nous espérons, dans des travaux subséquents, reprendre cette étude suivant l'optique de Lelong.

Le théorème suivant fut démontré (mais pas publié) par M. Mazurkiewicz.

Théorème A. Les fonctions holomorphes dans le disque unité qui sont prolongeables forment un ensemble maigre.

---

[1]) Subventionné par la NSF, Grant G-P-20150; le CNR du Canada, A-5597; le Gouvernement du Québec, et l'institut d'été de la Soc. Math. Can.

En 1968, M. Lelong démontra un théorème analogue pour les fonctions de plusieurs variables complexes [5]. Soit X un espace complexe, et notons par $\mathcal{O}(X)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans X. Voici le théorème de Lelong.

Théorème B. Soit X un domaine d'holomorphie dans $\mathbf{C}^n$. Alors, l'ensemble des fonctions holomorphes dans X qui sont prolongeables est maigre dans $\mathcal{O}(X)$.

Notons que tout domaine dans $\mathbf{C}$ est un domaine d'holomorphie et donc le théorème de Lelong étend celui de Mazurkiewicz.

Afin de préciser un peu ce résultat on introduit une notation. Soit f une fonction définie dans X et prenant ses valeurs sur la sphère de Riemann P (l'espace projectif). Alors $R(f)$ signifie l'ensemble des valeurs w telles qu'il existe une suite x_n dans X sans point limite et telle que $f(x_n) = w$, n $1, 2, \ldots$ $R(f)$ est donc l'ensemble des valeurs, prises une infinité de fois dans chaque voisinage du point idéal de la compactification d'Alexandrov. Si p est un point sur la frontière de X, on écrit

$$R(f, p) = \{ w \in \mathbf{P} : \exists \{x_n\} \subset X, x_n \to p, f(x_n) = w, n = 1, 2, \ldots \}$$

Le théorème qui suit est dû à Kierst et Szpilrajn [4] et nous donne un résultat beaucoup plus exact que celui de Mazurkiewicz.

Théorème C. Soit X le disque unité. Alors sauf un ensemble de fonctions maigres dans $\mathcal{O}(X)$, toute fonction holomorphe dans X a la propriété

$$R(f, p) = \mathbf{C}, \quad \text{pour tout} \quad |p| = 1 .$$

D'après ce théorème, dans le disque unité une fonction holomorphe générique a un comportement genre Picard au voisinage de chaque point de la frontière. Dans le prochain théorème, encore de Kierst et Szpilrajn *(op. cit.)* il s'agit d'un comportement genre Julia (c'est-à-dire, un comportement de Picard au voisinage d'une courbe).

Théorème D. A l'exception d'un ensemble de fonctions maigre dans $\mathcal{O}(\mathbf{C})$, toute fonction entière prend toute valeur complexe une infinité de fois dans tout ε-voisinage de toute courbe qui tend vers l'infini.

Nous présenterons un seul théorème (le théorème 2) qui englobe à la fois tous ces théorèmes, et ceci sur des domaines plus généraux.

Ce travail est en sorte une continuation de [3] où l'on considère la surjectivité d'une fonction générique.

Nous définissons pour $M(X)$ la topologie τ de convergence uniforme sur les compacts. Pour K un compact de X et $\varepsilon > 0$, soit $N(0, K, \varepsilon)$ l'ensemble des $f \in M(X)$ tels que f est holomorphe sur K et $\|f\|_K < \varepsilon$. Pour $f \in M(X)$, posons

$$N(f, K, \varepsilon) = f + N(0, K, \varepsilon).$$

La topologie τ est celle engendrée par ce système de voisinage. Puisque X est séparable on sait que le sousespace $\mathcal{O}(X)$ des fonctions holomorphes est un espace de Fréchet. De la complétude de $\mathcal{O}(X)$ découle celle de $M(X)$.

Soit $f \in M(X)$ et soit $D(f)$ l'ensemble des points de X ou f est déterminée c'est-à-dire, où f peut être définie comme véritable fonction continue prenant ses valeurs sur la sphère de Riemann P. Ecrivons $I(f) = X \setminus D(f)$. Alors $I(f)$ est contenue dans un ensemble de codimension deux, notamment la réunion de l'ensemble des singularités de X qui lui est de codimension au moins deux X étant normal et les points d'éclatement de f sur l'ensemble des points réguliers qui lui aussi est de codimension deux.

Une seconde topologie sur $M(X)$ est la topologie τ_χ de convergence *sphériquement* uniforme sur compacts, où χ désigne une métrique sur la sphère de Riemann. Soit $X = \bigcup_1^\infty K_j$, où les K_j sont compacts et $K_j \subset K_{j+1}^o$, $j = 1, 2, \ldots$ Pour $f, g \in M(X)$ on pose

$$d_j(f, g) = \sup \chi\big(f(z), g(z)\big),$$

où le sup est pris sur $K_j \cap D(f) \cap D(g)$, et

$$d(f, g) = \sum_1^\infty 2^{-j} d_j(f, g).$$

La topologie τ_χ est déterminée par la métrique d.

Pour les fonctions holomorphes, les deux topologies τ et τ_χ coïncident, mais pour les fonctions méromorphes la topologie τ est strictement plus forte que la topologie τ_χ. Donc la topologie τ_χ a l'avantage que (pour dimension 1) la suite $(z - 1/n)^{-1}$ est τ_χ-convergente tandis qu'elle est τ-divergente. En revanche la topologie τ a l'avantage douteux que $\big(M(X), \tau\big)$ est un groupe topologique.

Théorème 1. Si X est normal, alors $\big(M(X), d\big)$ est complet.

Démonstration. Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy et soit K un compact de X. Il suffit de voir que f_n converge sur K^0 vers une fonction méromorphe.

Pour commencer on verra que les domaines de détermination $D(f_n)$ sont éventuellement stable, c'est-à-dire,

$$(1) \qquad D(f_n) \cap K^0 = D(f_N) \cap K^0, n > N$$

pour un certain N. En effet choisissons N tel que $n > N$ entraine que

$$(2) \qquad \sup \chi\big(f_n(z), f_N(z)\big) < 1, z \in K \cap D(f_N) \cap D(f_n).$$

Soit $z \in D(f_N) \cap K^0$. Supposons que $f_N(z) \neq 0$, et soit a la valeur antipode à $f_N(z)$. Alors (2) entraîne que $(f_n - a)^{-1}$, $n > N$, est bornée dans l'intersection d'un voisinage de z et $D(f_N) \cap D(f_n)$. Puisque X est normal le théorème de Riemann nous dit que $(f_n - a)^{-1}$ est holomorphe au point z et donc $z \in D(f_n)$. De même, si $f_N(z) = 0$, on voit que $z \in D(f_n)$ en appliquant le théorème de Riemann directement à la fonction f_n. Nous avons démontré l'inclusion dans un sens dans (1) et l'inclusion contraire se voit de la même façon.

De (1) et (2) et du fait que $\{f_n\}$ est Cauchy, il suit que f_n converge sur $D(f_N) \cap K^0$ vers une fonction f méromorphe sur $D(f_N) \cap K^0$. Mais nous avons vu que $K^0 \setminus D(f_N)$ est de codimension deux. Le théorème d'extension de Levi [6] nous dit alors que la fonction méromorphe f s'étend à tout K^0. Ceci achève la démonstration.

II. Résultats principaux

Commençons par quelques notations et définitions. Soit X un espace analytique. Par une suite frontière dans X, on entend une suite $\{z_j\}$ dans X qui est éventuellement hors de tout compact. On dit qu'une telle suite tend vers l'infini. On dit qu'une fonction définie sur X s'annule à l'infini si elle tend vers zéro sur toute suite qui tend vers l'infini. Soit d une métrique sur X et soit ε une fonction continue et positive sur X qui s'annule à l'infini. Pour $\{z_j\}$ une suite frontière, on définit le ε-voisinage de $\{z_j\}$ comme suit:

$$V(\{z_j\}, \varepsilon) = \bigcup_{j=1}^{\infty} V(z_j, \varepsilon),$$

où $V(z, \varepsilon)$ signifie le disque ouvert de centre z et de rayon $\varepsilon(z)$.

Si X est un espace de Stein, alors X admet un recouvrement par compacts K_j, $j = 1, 2, \ldots$, tels que

$$(3) \qquad K_j \subset (K_{j+1})^0,$$

Théorème 2. Soit X un espace de Stein de dimension n. Soit K_j, $j = 1, 2, \ldots$, un recouvrement de X par compacts satisfaisants à (3). Soit d une métrique sur X et ε une fonction continue et positive qui s'annule à