

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1974)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUIDISTRIBUTION DES VALEURS D'UNE FONCTION ANALYTIQUE GÉNÉRIQUE SUR UN ESPACE DE STEIN
Autor: Brown, Léon / Gauthier, P. M.
Kapitel: II. RÉSULTATS PRINCIPAUX
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46903>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$(1) \quad D(f_n) \cap K^0 = D(f_N) \cap K^0, n > N$$

pour un certain N . En effet choisissons N tel que $n > N$ entraîne que

$$(2) \quad \sup \chi(f_n(z), f_N(z)) < 1, z \in K \cap D(f_N) \cap D(f_n).$$

Soit $z \in D(f_N) \cap K^0$. Supposons que $f_N(z) \neq 0$, et soit a la valeur antipode à $f_N(z)$. Alors (2) entraîne que $(f_n - a)^{-1}$, $n > N$, est bornée dans l'intersection d'un voisinage de z et $D(f_N) \cap D(f_n)$. Puisque X est normal le théorème de Riemann nous dit que $(f_n - a)^{-1}$ est holomorphe au point z et donc $z \in D(f_n)$. De même, si $f_N(z) = 0$, on voit que $z \in D(f_n)$ en appliquant le théorème de Riemann directement à la fonction f_n . Nous avons démontré l'inclusion dans un sens dans (1) et l'inclusion contraire se voit de la même façon.

De (1) et (2) et du fait que $\{f_n\}$ est Cauchy, il suit que f_n converge sur $D(f_N) \cap K^0$ vers une fonction f méromorphe sur $D(f_N) \cap K^0$. Mais nous avons vu que $K^0 \setminus D(f_N)$ est de codimension deux. Le théorème d'extension de Levi [6] nous dit alors que la fonction méromorphe f s'étend à tout K^0 . Ceci achève la démonstration.

II. RÉSULTATS PRINCIPAUX

Commençons par quelques notations et définitions. Soit X un espace analytique. Par une suite frontière dans X , on entend une suite $\{z_j\}$ dans X qui est éventuellement hors de tout compact. On dit qu'une telle suite tend vers l'infini. On dit qu'une fonction définie sur X s'annule à l'infini si elle tend vers zéro sur toute suite qui tend vers l'infini. Soit d une métrique sur X et soit ε une fonction continue et positive sur X qui s'annule à l'infini. Pour $\{z_j\}$ une suite frontière, on définit le ε -voisinage de $\{z_j\}$ comme suit:

$$V(\{z_j\}, \varepsilon) = \bigcup_{j=1}^{\infty} V(z_j, \varepsilon),$$

où $V(z, \varepsilon)$ signifie le disque ouvert de centre z et de rayon $\varepsilon(z)$.

Si X est un espace de Stein, alors X admet un recouvrement par compacts $K_j, j = 1, 2, \dots$, tels que

$$(3) \quad K_j \subset (K_{j+1})^0,$$

Théorème 2. Soit X un espace de Stein de dimension n . Soit $K_j, j = 1, 2, \dots$, un recouvrement de X par compacts satisfaisants à (3). Soit d une métrique sur X et ε une fonction continue et positive qui s'annule à

l'infini. Alors, pour $m \leq n$, toute $f \in \mathcal{O}(X, \mathbf{C}^m)$, sauf un ensemble maigre, a la propriété suivante: pour toute suite frontière $\{z_j\}$ telle que chaque z_j est situé sur ∂K_j , on a que

$$f(V(\{z_j\}, \varepsilon)) = \mathbf{C}^m.$$

Un résultat analogue est valable pour les fonctions méromorphes.

Théorème 3. Sous les hypothèses du théorème 2, toute fonction méromorphe $f \in M(X)$, sauf un ensemble à la fois τ -maigre et τ_χ -maigre, a la propriété suivante: pour toute suite frontière $\{z_j\}$ telle que chaque z_j est situé sur ∂K_j , on a que

$$f(V(\{z_j\}, \varepsilon)) = \mathbf{P}.$$

Avant de procéder aux démonstrations, examinons quelques-unes des conséquences de ces deux théorèmes.

Soit $\sigma: [0, +\infty) \rightarrow X$ un chemin continu sur X . Le chemin σ est dit un chemin frontière si $\sigma(t)$ tend vers l'infini, lorsque $t \rightarrow +\infty$. Soit ε une fonction positive et continue sur X . On définit le ε -voisinage du chemin σ par

$$V(\sigma, \varepsilon) = \bigcup_t V(\sigma(t), \varepsilon).$$

Du théorème 3 on déduit aisément le

Corollaire 3.1. Soit X un espace de Stein, d une métrique sur X et ε une fonction continue et positive qui s'annule à l'infini. Alors pour toute fonction méromorphe f sur X , à l'exception d'un ensemble à la fois τ -maigre et τ_χ -maigre dans $M(X)$, on a que

$$f(V(\sigma, \varepsilon)) = P,$$

pour tout chemin frontière σ .

Suivant une terminologie suggestive on peut dire que pour une fonction méromorphe générique sur un espace de Stein, tout chemin frontière est un chemin de Picard.

Le théorème 2 admet un corollaire analogue pour les applications holomorphes. En particulier, le théorème 2 contient le théorème D , et le théorème 3 donne une version du théorème D pour les fonctions méromorphes.

Si X est un espace de Stein, on appelle X^* une compactification de X pourvue que X^* soit un espace compact et séparé qui contient une copie homéomorphe de X dense et ouverte dans X^* . On appelle $\beta = X^* \setminus X$ la frontière idéale de X . Si f est méromorphe sur X et $p \in \beta$, on dénote par

$R(f, p)$ l'ensemble des valeurs $w \in P$ telle qu'il existe une suite $\{z_j\}$ dans X , $z_j \rightarrow p$, et $f(z_j) = w, j = 1, 2, \dots$.

Corollaire 3.2. Soit X un espace de Stein et X^* une compactification métrisable de X . Alors toute fonction méromorphe sur X , sauf un ensemble à la fois τ -maigre et τ_x -maigre, a la propriété

$$(4) \quad R(f, p) = \mathbf{P}, \quad \text{pour tout } p \in \beta.$$

Démonstration du corollaire. Puisque β est séparable, il suffit de montrer que pour tout $p \in \beta$, l'ensemble des fonctions ne satisfaisant pas à (4) est maigre.

Soit donc $p \in \beta$, d une métrique sur X^* , et posons $\varepsilon(z) = d(z, \beta)$, pour $z \in X$. Fixons un voisinage U de p . Il suffit de montrer que, sauf un ensemble maigre, toute $f \in M(X)$ a la propriété

$$(5) \quad f(U \cap X) = \mathbf{P}.$$

Soit $\{K_j\}$ un recouvrement de X par compacts satisfaisants à (3) et tels que chaque K_j contient un point z_j sur sa frontière tel que $V(z_j, \varepsilon) \subset U$. Cette construction est possible. Evidemment une fonction générique au sens du théorème 3 satisfait à (5), ce qui achève la démonstration du corollaire.

Utilisant une terminologie semblable à celle suivant le corollaire 3.1, on peut dire que sur un espace de Stein, une fonction méromorphe générique admet tout point frontière comme point de Picard.

Le théorème 2 aussi admet un corollaire analogue au corollaire 3.2. En particulier ces corollaires englobent le théorème C ainsi que le théorème B.

Passons enfin aux démonstrations des théorèmes.

Démonstration du théorème 2. Nous allons commencer par le cas où $m = n$.

Pour $f \in \mathcal{O}(X, \mathbf{C}^n)$ et $w \in \mathbf{C}^n$, dénotons par $\dim_x f^{-1}(w)$ la dimension en x de l'ensemble analytique $f^{-1}(w)$.

Soit B une boule de \mathbf{C}^n et considérons l'ensemble $A(B) \subset \mathcal{O}(X, \mathbf{C}^n)$, d'applications holomorphes f telles qu'il existe une suite $\{z_j\}$, $z_j \in \partial K_j$, et un point $w \in B$ ayant la propriété que si $f(x) = w$ pour $x \in V(\{z_j\}, \varepsilon)$ alors $\dim_x f^{-1}(w) \neq 0$. Remarquons que $A(B)$ contient les applications $f \in \mathcal{O}(X, \mathbf{C}^n)$ telles que

$$f(V(\{z_j\}, \varepsilon)) \not\subset B.$$

Conséquemment il suffit (pour $m=n$) de montrer que $A(B)$ est un ensemble rare, puisque \mathbf{C}^n admet un recouvrement par une suite dénombrable de boules.

a) $A(B)$ est fermé. En effet, soit une suite de $f_k, f_k \in A(B)$, et $\lim f_k = f$. Alors il existe des suites $\{z_{k,j}\}$, $z_{k,j} \in \partial K_j$, et des points $w_k \in B$ associés. On peut supposer que la suite w_k , correspondante aux f_k dans la définition de $A(B)$, converge vers w , et que pour chaque k , $\{z_{k,j}\}$ converge vers $z_j \in \partial K_j$. Si nécessaire, on choisit une soussuite avec ces propriétés par le procédé usuelle de diagonalisation.

Un argument standard (voir preuve du lemme 2 dans [3]) montre que si $z \in V(\{z_j\}, \varepsilon)$ et $f(z) = w$, alors $\dim_z f^{-1}(w) \neq 0$. Donc $f \in A(B)$ et $A(B)$ est fermé.

b) $C(B) = \mathcal{O}(X, \mathbf{C}^n) \setminus A(B)$ est dense dans $\mathcal{O}(X, \mathbf{C}^n)$. Soit donc $f \in \mathcal{O}(X, \mathbf{C}^n)$ et un voisinage fondamental de f , $N(f, K, \delta)$. Soit v un indice tel que $\hat{K} \subset K_v$ (\hat{K} signifie l'enveloppe d'holomorphie de K). Puisque ∂K_{v+1} est compact, il existe une suite finie de boules paramétriques U_μ ; $\mu = 1, 2, \dots, q$, ayant les propriétés suivantes:

$$1) \text{ Pour chaque } \mu, \hat{K} \cap \bar{U}_\mu = \emptyset.$$

$$2) \text{ Pour } \mu \neq \alpha, \bar{U}_\mu \cap \bar{U}_\alpha = \emptyset.$$

$$3) \text{ Pour chaque } z \in \partial K_{v+1}, \text{ il y a un } \mu \text{ tel que } V(z, \varepsilon) \supset U_\mu.$$

Il nous suffira maintenant de montrer l'existence d'une application $g \in \mathcal{O}(X, \mathbf{C}^n)$ telle que g soit près de f sur K et g envoie chaque U_μ sur un ensemble contenant B .

Puisque \hat{K} est holomorphiquement convexe, il existe des boules paramétriques G_μ , $\mu = 1, 2, \dots, q$, telles que pour chaque μ ,

$$(6) \quad \hat{G}_\mu \subset U_\mu,$$

et

$$(7) \quad (K \cup G_1 \cup \dots \cup G_q)^\wedge \subset (X \setminus \bigcup_1^q \bar{U}_\mu) \cup \bigcup_1^q U_\mu.$$

Il existe pour $\mu = 1, 2, \dots, q$, une application non-singulière et injective

$$g_\mu : U_\mu \rightarrow \mathbf{C}^n$$

telle que

$$(8) \quad g_\mu(G_\mu) \supset \bar{B}.$$

D'après (7) et le théorème de Runge-Oka-Cartan, il existe $g \in \mathcal{O}(X, \mathbb{C}^n)$ telle que g est près de f sur K et g est près de g_μ sur \bar{G}_μ , $\mu = 1, 2, \dots, q$. Il en suit que

$$g \in N(f, K, \delta) \cap C(B).$$

En effet il est évident que $g \in N(f, K, \delta)$ si g est une bonne approximation. Pour voir que $g \in C(B)$ notons que puisque g_μ est injective, la distance entre $g_\mu(\partial G_\mu)$ et B est positive. Aussi puisque $g|_{\bar{G}_\mu}$ est non-singulière, $\partial g(G_\mu) \subset g(\partial G_\mu)$. Donc si g est près de g_μ , la distance entre $\partial g(G_\mu)$ et B est positive. Donc $g(G_\mu) \supset B$ ce qui montre que $g \in C(B)$. Ceci achève la démonstration pour le cas $m = n$.

Ayant démontré le cas $m = n$, le cas $m < n$ devrait être vrai à fortiori. En effet la même démonstration marche avec modifications évidentes. Ceci achève la démonstration du théorème 2.

Démonstration du théorème 3. La démonstration du théorème 3 est très semblable à celle que nous venons de terminer. En effet nous allons tout simplement indiquer les modifications à apporter à cette démonstration pour le cas des fonctions méromorphes.

Premièrement la boule B est située dans une carte de P . Ensuite on définit $A(B)$ comme étant l'ensemble des fonctions méromorphes f telle qu'il existe une suite $\{z_j\}$, $z_j \in \partial K_j$, et un $w \in \bar{B}$ avec la propriété que si $f(z) = w$, $z \in R(X) \cap V(\{z_j\}, \varepsilon)$ alors $f \equiv w$ au voisinage de z . Dans cette définition $R(X)$ signifie l'ensemble des points réguliers de X .

Pour ce qui est de montrer que $A(B)$ est à la fois τ -rare et τ_x -rare, notons que puisque la topologie τ est plus fine que la topologie τ_x il suffit de montrer que $A(B)$ est τ_x -fermé et que $C(B)$ est τ -dense.

a) $A(B)$ est fermé. Soient $\{f_k\}$, $\{w_k\}$, et w définis comme dans la démonstration du théorème 2. Soit z un point de

$$R(X) \cap V(\{z_j\}, \varepsilon)$$

tel que $f(z) = w$. On montre que f est constante au voisinage de z . Sinon, il y a une droite complexe Y passant par z telle que la fonction $f|_L$ ainsi que les fonctions $f_k|_L$ sont toutes non-constantes et méromorphes sur L . Des arguments standards pour une seule variable complexe montre que pour k grand, f_k prend la valeur w_k sur $R(X)$ près de z , et f_k est non-constante au voisinage de z . Puisque $z_{k,j} \rightarrow z_j$, ceci contredit la manière dont les f_k étaient choisis. Donc $A(B)$ est fermé.

b) $C(m)$ est dense. Ici il faut faire un petit changement. La fonction g sera de la forme $f + h$ où h doit être très petit sur K et très près de $g_\mu - f$ sur \bar{G}_μ , $\mu = 1, 2, \dots, q$. Ceci ne pose aucun problème si l'on choisit les U_μ , de telle façon que $f|U_\mu$ soit holomorphe, $\mu = 1, \dots, q$, ce qui est toujours possible.

En faisant ces modifications, le théorème 3 est démontré.

Dans la suite de cet article nous allons nous borner au cas où X est une surface de Riemann ouverte. Donc X est Stein et les théorèmes 2 et 3, et bien sûr leurs corollaires, sont valables pour une surface de Riemann ouverte quelconque.

Le corollaire 3.2 et son homologue pour les fonctions holomorphes sont valables pour les compactifications métrisables. Mais ceci inclut une grande partie des compactifications que l'on rencontre en variables complexes, notamment les compactifications de Stoilow-Kérékjarto, de Kuramochi, de Martin, et d'Alexandrov.

Une autre compactification importante est obtenue lorsque X est l'intérieur d'une surface à bord \bar{X} . Si \bar{X} est compact on pose $X^* = \bar{X}$, tandis que si \bar{X} n'est pas compact on pose X^* égale à la compactification d'Alexandrov pour \bar{X} . Dans les deux cas, le corollaire 3.2 dit qu'une fonction méromorphe générique sur l'intérieur d'une surface de Riemann à bord prend toute valeur de la sphère de Riemann une infinité de fois dans tout voisinage de tout point du bord. Bien sûr un résultat analogue est valable pour les fonctions holomorphes mais avec l'infini comme valeur exceptionnelle.

On termine par un exemple « plus fort » que ce que l'on a obtenu par nos arguments de catégorie.

Théorème 4. Soit X une surface de Riemann ouverte, d une métrique sur X et ε une fonction positive et continue sur X . Alors il existe une fonction f dans $M(X)$ ($\mathcal{O}(X)$) ayant la propriété suivante: pour toute suite frontière $\{z_j\}$,

$$f(V(\{z_j\}, \varepsilon)) = \mathbf{P}(\mathbf{C}).$$

Démonstration. On peut construire une suite D_m de disques paramétriques disjoints de façon à ce que les D_m soient éventuellement disjoints de tout compact et pour tout $z \in X$, il y a un m tel que $V(z, \varepsilon) \supset D_m$.

Pour chaque m , soit a_m le centre de D_m , et soit Φ_m une représentation conforme du disque unité sur D_m telle que $\Phi_m(0) = a_m$. Posons b_m

$= \Phi_m(1/m)$. D'après le théorème de Florack, il existe une fonction $g \in \mathcal{O}(X)$ telle que $g(a_m) = 0$ et $g(b_m) = 1$, $m = 1, 2, \dots$. Alors g est presque la fonction recherchée. Soit $\{z_j\}$ une suite frontière. Alors $V(\{z_j\}, \varepsilon)$ contient $\cup D_{m(j)}$, pour une sous-suite $m(j)$ d'indices. Posons $g_j = g \circ \Phi_{m(j)}$. Alors puisque $g_j(0) = 0$ et $g_j(1/m(j)) = 1$, la suite $\{g_j\}$ n'est pas une famille normale dans le disque unité D . Par un théorème bien connu,

$$g(V(\{z_j\}, \varepsilon)) \supset \cup_j g(D_{m(j)}) \supset \cup_j g_j(D)$$

ne peut manquer qu'au plus une valeur du plan fini. La fonction holomorphe que l'on cherche est $\sin g$ et la fonction méromorphe est tout simplement une fonction doublement périodique composée avec g .

Nous remarquons que dans cet exemple il n'y a pas de restriction sur la croissance des suites frontières telle qu'il y en avait dans nos arguments catégoriques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GAUTHIER, P. M. Cercles de remplissage and asymptotic behaviour along circuitous paths. *Can. J. Math.* 22, 389-393 (1970). *MR* 41-2016.
- [2] ——— and W. HENGARTNER. The value distribution of most functions of one or several complex variables. *Ann. of Math.* 96, 31-52 (1972). *ZB* 215-431.
- [3] ——— et NGO VAN QUÊ. Problème de surjectivité des applications holomorphes. *Ann. E.N.S. Pisa (à paraître)*.
- [4] KIERST, S. et E. SZPILRAJN. Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes. *Fund. Math.* 21, 276-294 (1933).
- [5] LELONG, P. Fonctions plurisousharmoniques et ensembles polaires dans les espaces vectoriels topologiques. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B* 267 (1968), A916-A918. *MR* 39-7412.
- [6] NARASIMHAN, R. *Introduction to the theory of analytic spaces*. Springer Lecture Notes, No. 25, 1966.
- [7] OFFORD, A. C. The distribution of values of an entire function whose coefficients are independent random variables, I. *Proc. London Math. Soc.* (3) 14a (1965), 199-238. *MR* 31-1381.

Léon Brown

Wayne State University
Detroit, Michigan 48202

P. M. Gauthier

Université de Montréal
Montréal, Canada.

(Reçu le 17 janvier 1974)