

## 4. FURTHER RESULTS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

At the end of the proof of Theorem 2 we showed that  $\int_{-\infty}^{\infty} K_T(u) du = 1$ .

Also, (2) implies that  $K_T(x) \geq 0$  for all  $x$ . Now formula (8) can be interpreted as expressing a certain average of  $x^{-\frac{1}{2}} \{\Pi(x) - \tau(x)\} \log x$  as  $\Sigma(x)$  plus a bounded error term.

It follows that there exist sequences  $\{x_n\}$  and  $\{y_n\}$  tending to infinity for which

$$\begin{aligned} x_n^{-\frac{1}{2}} \{\Pi(x_n) - \tau(x_n)\} \log x_n &> c \\ y_n^{-\frac{1}{2}} \{\Pi(y_n) - \tau(y_n)\} \log y_n &< -c \end{aligned}$$

for any given number  $c > 0$ . Thus

$$x^{-\frac{1}{2}} \{\Pi(x) - \tau(x)\} \log x$$

is unbounded from above and below. If we recall (3), we have completed our proof that  $\pi(x) - \text{li } x$  changes sign infinitely often.

#### 4. FURTHER RESULTS

Littlewood actually showed a bit more than we have. He proved that

$$x^{-\frac{1}{2}} \{\pi(x) - \text{li } x\} \log x / \log \log \log x$$

has a positive limit superior and negative limit inferior. The best account of this estimate is probably that given in [5].

It appears that our arguments can be extended to achieve this estimate. The contradiction arguments can be reorganized, exploiting more fully the hypothesized one sided bound in Theorem 2. However, we would also require an explicit estimate in place of the  $o_T(1)$  in the conclusion of this theorem. Such estimation would cancel out the economy we have achieved.

It is reasonable to ask for an  $x > 3/2$  for which  $\pi(x) - \text{li } x > 0$ . The first person to provide an estimate of such a number  $x$  was Skewes [13]. He showed that there exists an  $x < \exp \exp \exp \exp (7.705)$  for which  $\pi(x) - \text{li } x > 0$ . This enormous bound was reduced to a more modest  $1.65 \cdot 10^{1165} \approx \exp \exp (7.895)$  by R. S. Lehman [10]. Each of these authors combined theoretical arguments with extensive numerical calculations using the position of many zeros of the Riemann zeta function. The case in which the Riemann hypothesis is assumed false requires much more work than we had to do.

It would be interesting to know explicitly the first (or indeed any!)  $x > 3/2$  for which  $\pi(x) - \text{li } x > 0$ . Lehman observed in [10] that it seemed likely that such a number would have to exceed  $10^{20}$ .

#### REFERENCES

- [1] BATEMAN, P. T. and H. G. DIAMOND. Asymptotic distribution of Beurling's generalized prime numbers. *M.A.A. Studies in Mathematics*, 6, W. J. LeVeque, ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1969), pp. 152-210.
- [2] COHEN, A. M. and J. E. MAYHEW. On the difference  $\pi(x) - \text{li } x$ . *Proc. L.M.S.* 18 (1968), pp. 691-713.
- [3] GROSSWALD, E. Oscillation theorems. *Theory of Arithmetic Functions*, Springer Lecture Notes, No. 251 (1972), pp. 141-168.
- [4] INGHAM, A. E. *The distribution of prime numbers*. Cambridge University Press, Cambridge, 1932. Reprinted by Hafner Pub. Co., New York, 1971.
- [5] ——— A note on the distribution of primes. *Acta Arith.* 1 (1936), pp. 201-211.
- [6] ——— Two conjectures in the theory of numbers. *Am. J. Math.* 64 (1942), pp. 313-319.
- [7] KATZNELSON, Y. *An introduction to harmonic analysis*. John Wiley and Sons, New York, 1968.
- [8] KNAPOWSKI, S. On sign changes in the remainder term in the prime number formula. *J.L.M.S.* 36 (1961), pp. 451-460.
- [9] KREISEL, G. On the interpretation of non-finitist proofs, II, *J. Symbolic Logic* 17 (1952), pp. 43-58 (especially § VI).
- [10] LEHMAN, R. S. On the difference  $\pi(x) - \text{li } x$ . *Acta Arith.* XI (1966), 397-410.
- [11] LITTLEWOOD, J. E. Sur la distribution des nombres premiers. *C.R.A.S. Paris*, 158 (1914), 1869-1872.
- [12] ROSSER, J. B. and L. SCHOENFELD. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Ill. J. Math.* 6 (1962), pp. 64-94.
- [13] SKEWES, S. On the difference  $\pi(x) - \text{li } x$ , II. *Proc. L.M.S.* (3) 5 (1955), pp. 48-70.

(Reçu le 12 décembre 1974)

Harold G. Diamond  
University of Illinois  
Urbana, Ill. 61801