SUR LA FONCTION SOMMATOIRE DE LA FONCTION « SOMME DES CHIFFRES »

Autor(en): **Delange, Hubert**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-47328

SUR LA FONCTION SOMMATOIRE DE LA FONCTION « SOMME DES CHIFFRES »

par Hubert DELANGE

1. INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit, q est un entier fixe > 1. On désigue par $S_q(n)$ la somme des chiffres de l'entier positif ou nul n écrit en base q.

Un certain nombre d'auteurs ont étudié le comportement de l'expression

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) .$$

Bush[1]) avait montré tout d'abord que l'on a quand x tend vers l'infini

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) \sim \frac{q-1}{2 \log q} x \log x .$$

Bellman et Shapiro [2]) ont obtenu

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) = \frac{q-1}{2 \log q} x \log x + O(x \log \log x) .$$

Mirsky [3]) a remplacé le $O(x \log \log x)$ par $O(x)$, puis Drazin et Griffith [4]) ont fait une étude plus précise du terme d'erreur.

Enfin Trollope[5]) a établi le résultat suivant pour le cas où $q = 2$:

n étant un entier satisfaisant à $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$, avec $m \geqslant 0$, posons $n = 2^m(1+x)$, de sorte que $0 \leqslant x < 1$.

Alors on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_2(k) = \frac{n \log n}{2 \log 2} - 2^{m-1} \left(2f(x) + (1+x) \frac{\log(1+x)}{\log 2} - 2x \right) ,$$

---

[1]) An asymptotic formula for the average sum of the digits of integers, *Amer. Math. Monthly*, 47 (1940), pp. 154-156.

[2]) A problem in additive number theory, *Ann. of Math.* (2), 49 (1948), pp. 333-340.

[3]) A theorem on representations of integers in the scale of r, *Scripta Math.*, 15 (1949), pp. 11-12.

[4]) On the decimal representation of integers, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* (4), 48 (1952), pp. 555-565.

[5]) An explicit expression for binary digital sums, *Math. Mag.*, 41 (1968), pp. 21-25.

où $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} g(2^r x)$,

g étant la fonction périodique de période 1 déterminée par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1-x}{2} \text{ pour } \frac{1}{2} < x < 1 . \end{cases}$$

La démonstration de Trollope est assez compliquée. De plus, il dit que son résultat peut se généraliser pour q quelconque, mais que les calculs sont beaucoup plus compliqués.

Nous nous proposons ici de montrer qu'un calcul extrêmement simple conduit à un énoncé général qui est équivalent pour $q = 2$ à celui de Trollope, mais dont la formulation nous paraît plus élégante.

On a le théorème suivant:

THÉOREME. *Il existe une fonction F continue sur* **R** *et périodique de période* 1, *telle que, pour tout entier* $m \geqslant 1$,

$$\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m=1} S_q(n) = \frac{q-1}{2 \log q} \log m + F\left(\frac{\log m}{\log q}\right). \tag{1}$$ [6]

On peut définir F de la façon suivante :

On définit d'abord une fonction g sur **R** *par la formule*

$$g(x) = \int_0^x \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt . \tag{2}$$

Cette fonction est évidemment continue sur **R** et elle est périodique de période 1 du fait que la fonction $t \mapsto [qt] - q[t] - \frac{q-1}{2}$ est périodique de période 1 et que son intégrale sur l'intervalle [0, 1] est nulle. Elle est donc bornée et la série $\sum_{r=0}^{\infty} q^{-r} g(q^r x)$ est uniformément convergente sur **R**.

Ainsi *la fonction h définie sur* **R** *par*

$$h(x) = \sum_{r=0}^{\infty} q^{-r} g(q^r x) \tag{3}$$

---

[6]) Il est clair que la fonction F est unique car cette formule détermine ses valeurs aux points $\frac{\log m}{\log q} - \left[\frac{\log m}{\log q}\right]$, dont l'ensemble est partout dense sur [0,1].

est continue sur **R** (et aussi périodique de période 1, mais cette propriété ne nous sert pas).

Finalement on pose

(4) $$F(x) = \frac{q-1}{2}(1+[x]-x) + q^{1+[x]-x} h(q^{x-[x]-1}).$$

Il est clair que la fonction F définie par cette formule est périodique de période 1, continue pour x non entier, et continue à droite pour x entier. On vérifie immédiatement qu'en fait elle est aussi continue pour x entier: on a $F(1) = \frac{q-1}{2} + q\,h\left(\frac{1}{q}\right)$, ce qui est égal à 0 car, comme $g(x) = 0$ pour x entier, la formule (3) donne $h\left(\frac{1}{q}\right) = g\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{q-1}{2q}$; or on voit que, quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $F(x)$ tend vers $h(1) = 0$.

Nous compléterons notre résultat en montrant que la fonction F n'est dérivable en aucun point et déterminant explicitement sa série de Fourier. Celle-ci est absolument convergente et ses coefficients s'expriment à l'aide des valeurs de la fonction ζ de Riemann aux points $\frac{2k\pi i}{\log q}$, où $k \in \mathbf{Z}^*$.[7])

2. Démonstration de la formule (1)

Soient $a_0(n)$, $a_1(n)$, $a_2(n)$, ... les chiffres de l'entier positif ou nul n écrit en base q, lus de droite à gauche. En fait il y a seulement un nombre fini de chiffres, mais on peut former une suite infinie en complétant par des zéros.

Ainsi on a $$n = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n)\, q^r,$$

avec $0 \leqslant a_r(n) < q$ pour tout $r \geqslant 0$ et $a_r(n) = 0$ pour $r > \frac{\log n}{\log q}$.

On a aussi $S_q(n) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n)$.

[7]) La possibilité de déterminer explicitement la série de Fourier de F nous a été signalée par M. Mauclaire. Il l'obtenait à partir du résultat suivant, qu'il avait établi antérieurement:

On a pour $\operatorname{Re} s > 0$: $s \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{s+1}} S_q([t])\, dt = \frac{q^s - q}{q^s - 1} \zeta(s)$.

Nous donnerons ici un calcul direct.

2.1. Remarquons d'abord que l'on a pour chaque $r \geqslant 0$

$$a_r(n) = \left[\frac{n}{q^r}\right] - q\left[\frac{n}{q^{r+1}}\right]. \tag{5}$$

Cela résulte immédiatement de ce que l'on a pour chaque $k \geqslant 0$

$$\left[\frac{n}{q^k}\right] = \sum_{j=k}^{\infty} a_j(n)\, q^{j-k}.$$

Ceci est évidemment vrai pour $k = 0$. Pour $k \geqslant 1$ on peut écrire

$$\frac{n}{q^k} = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(n)\, q^{j-k} + \sum_{j=k}^{\infty} a_j(n)\, q^{j-k},$$

et on voit que la première somme au second membre est $\geqslant 0$ et < 1, tandis que la deuxième est un entier.

Comme, pour $n \leqslant t < n + 1$,

$$\left[\frac{t}{q^r}\right] = \left[\frac{n}{q^r}\right] \text{ et } \left[\frac{t}{q^{r+1}}\right] = \left[\frac{n}{q^{r+1}}\right],$$

on peut écrire (5) sous la forme

$$a_r(n) = \int_n^{n+1} \left(\left[\frac{t}{q^r}\right] - q\left[\frac{t}{q^{r+1}}\right]\right) dt. \tag{6}$$

2.2. Ceci dit, soit m un entier $\geqslant 1$, et posons $l = \dfrac{\log m}{\log q}$.

On voit d'abord que, si $n < m$, on a $a_r(n) = 0$ pour $r > [l]$.
Ainsi on a pour chaque $n < m$

$$S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} a_r(n).$$

Il en résulte que l'on a

$$\sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} \left(\sum_{n=0}^{m-1} a_r(n)\right). \tag{7}$$

Mais la formule (6) donne

$$\sum_{n=0}^{m-1} a_r(n) = \int_0^m \left(\left[\frac{t}{q^r}\right] - q\left[\frac{t}{q^{r+1}}\right]\right) dt$$

$$= \int_0^m \left(\left[\frac{t}{q^r} \right] - q \left[\frac{t}{q^{r+1}} \right] - \frac{q-1}{2} \right) dt + m \frac{q-1}{2}.$$

En faisant le changement de variable $t = q^{r+1} u$, on voit que

$$\sum_{n=0}^{m-1} a_r(n) = q^{r+1} g(q^{-r-1} m) + m \frac{q-1}{2}.$$

En reportant cette valeur dans (7) on obtient

$$\sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1} m) + (1 + [l]) m \frac{q-1}{2}$$

ou

$$\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1} m) + (1 + [l]) \frac{q-1}{2}. \tag{8}$$

En posant $r = [l] - k$, on a

$$\sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1} m) = \sum_{k=0}^{[l]} q^{1+[l]-k} g(mq^{k-[l]-1})$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} q^{1+[l]-k} g(mq^{k-[l]-1}),$$

puisque, pour $k > [l]$, $m\, q^{k-[l]-1}$ est un entier et $g(mq^{k-[l]-1}) = 0$.

En tenant compte de ce que $m = q^l$, ceci donne

$$\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1} m) = q^{1+[l]-l} \sum_{k=0}^{\infty} q^{-k} g(q^k \cdot q^{l-[l]-1})$$
$$= q^{1+[l]-l} h(q^{l-[l]-1}).$$

Ainsi (8) donne

$$\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \frac{q-1}{2} l + \frac{q-1}{2} (1 + [l] - l) + q^{1+[l]-l} h(q^{l-[l]-1})$$
$$= \frac{q-1}{2} l - F(l),$$

ce qui est le résultat désiré.

2.3. Remarque : On peut montrer que l'on a pour tout x réel $\geqslant 1$

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) = \frac{q-1}{2 \log q} x \log x + x F\left(\frac{\log x}{\log q}\right) - h(x) + (1 + [x] - x) S_q([x]),$$

formule qui donne (1) en prenant $x = m$.

En posant $\lambda = \dfrac{\log x}{\log q}$, on a

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[\lambda]} \left(\sum_{n \leq x} a_r(n) \right).$$

On déduit de (6) que l'on a

$$\sum_{n \leq x} a_r(n) = \int_0^x \left(\left[\frac{t}{q^r} \right] - q \left[\frac{t}{q^{r+1}} \right] \right) dt + (1 + [x] - x)\, a_r([x]),$$

$$= q^{r+1} g(q^{-r-1}x) + \frac{q-1}{2} x + (1 + [x] - x)\, a_r([x]),$$

d'où

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) =$$

$$\sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1} g(q^{-r-1}x) + \frac{q-1}{2} x (1 + [\lambda]) + (1 + [x] - x)\, S_q([x]),$$

puis on vérifie que

$$\sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1} g(q^{-r-1}x) = q^{1+[\lambda]} \sum_{k=0}^{[\lambda]} q^{-k} g(q^k \cdot q^{\lambda - [\lambda] - 1})$$

$$= x\, q^{1+[\lambda]-\lambda} h(q^{\lambda - [\lambda] - 1}) - h(x).$$

3. Démonstration de la non dérivabilité de la fonction F

Nous allons maintenant montrer que la fonction F n'est dérivable en aucun point. En raison de la périodicité, il suffit de montrer qu'elle n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et qu'elle n'est pas dérivable à gauche au point 1.

3.1. On voit que ceci se ramène à montrer que la fonction h n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $\left] \dfrac{1}{q}, 1 \right[$ et n'est pas dérivable à gauche au point 1.

En effet, si $\dfrac{1}{q} \leqslant t < 1$, on a $0 \leqslant 1 + \dfrac{\log t}{\log q} < 1$ et (4) donne

$$F\left(1+\frac{\log t}{\log q}\right) = -\frac{q-1}{2}\cdot\frac{\log t}{\log q}+\frac{1}{t}h(t)\,.$$

Ceci vaut encore pour $t = 1$ car $F(1) = h(1) = 0$.

Ainsi on a pour $\frac{1}{q} \leqslant t \leqslant 1$

$$h(t) = t\,F\left(1+\frac{\log t}{\log q}\right)+\frac{q-1}{2\log q}\,t\log t\,.$$

Par suite, si F était dérivable au point θ de $]0, 1[$, h serait dérivable au point $q^{\theta-1}$ de $\left]\frac{1}{q}, 1\right[$. Si F était dérivable à gauche en 1, h serait dérivable à gauche en 1.

En fait, nous montrerons que h n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et n'est pas dérivable à gauche au point 1. [8])

3.2. Nous utiliserons la remarque suivante:

Si $x = \frac{a}{q^k}$, où $a \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$h(x) = \sum_{r=0}^{k-1} q^{-r} g(q^r x)$$

puisque, dès que $r \geqslant k$, $q^r x$ est un entier et $g(q^r x) = 0$.

Par suite, si $x = \frac{a}{q^k}$ et $x' = \frac{b}{q^k}$, avec a et $b \in \mathbf{Z}$, $a \neq b$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\frac{h(x') - h(x)}{x' - x} = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x') - g(q^r x)}{q^r x' - q^r x}\,.$$

3.3. Il est très facile de montrer que la fonction h n'est pas dérivable à gauche au point 1.

Cela résulte immédiatement de ce que, si $\xi_k = 1 - q^{-k}$, la suite $\left\{\frac{h(1) - h(\xi_k)}{1 - \xi_k}\right\}$ tend vers $+\infty$.

---

[8]) La fonction h n'est donc dérivable en aucun point. Dans le cas où $q = 2$, $-h$ est la fonction f de Trollope. Celui-ci indique que cette fonction f n'est dérivable en aucun point.

En effet, d'après la remarque précédente,

$$\frac{h(1) - h(\xi_k)}{1 - \xi_k} = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r) - g(q^r \xi_k)}{q^r - q^r \xi_k} = \sum_{r=0}^{k-1} q^{k-r} \left(g(q^r) - g(q^r \xi_k)\right).$$

Mais, comme $q^r \xi_k = q^r - q^{r-k}$, d'après la périodicité de g on a pour chaque $r \leqslant k - 1$

$$g(q^r) - g(q^r \xi_k) = g(1) - g(1 - q^{r-k}) = \int_{1-q^{r-k}}^{1} \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt,$$

ce qui est égal à $q^{r-k} \frac{q-1}{2}$ car, pour $1 - q^{r-k} \leqslant t < 1$, $[t] = 0$ et $[qt] = q - 1$ puisque $q - 1 \leqslant q - q^{r-k+1} \leqslant qt < q$. On voit donc que

$$\frac{h(1) - h(\xi_k)}{1 - \xi_k} = k \frac{q-1}{2}.$$

3.3. Soit maintenant θ un nombre de l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Nous allons montrer que h n'est pas dérivable en θ.

Nous nous baserons sur l'observation suivante:

Si h était dérivable en θ, quelles que soient les suites $\{x_k\}$ et $\{x'_k\}$ tendant vers θ, avec $x_k \leqslant \theta < x'_k$ pour chaque k, la suite $\left\{\frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k}\right\}$ tendrait vers $h'(\theta)$. [9])

3.3.1. Remarquons d'abord que l'on peut écrire

$$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j q^{-j},$$

où les α_j sont des entiers satisfaisant à $0 \leqslant \alpha_j \leqslant q - 1$ et il y a une infinité de j pour lesquels $\alpha_j \neq q - 1$ (l'écriture du nombre θ en base q étant $0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_j \ldots$).

---

[9]) Il existerait une fonction ε continue en θ et nulle en ce point telle que l'on ait pour tout t

$$h(t) = h(\theta) + (t - \theta) h'(\theta) + (t - \theta) \varepsilon(t),$$

et l'on aurait

$$\frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k} = h'(\theta) + \frac{(x'_k - \theta) \varepsilon(x'_k) + (\theta - x_k) \varepsilon(x_k)}{x'_k - x_k},$$

d'où

$$\left| \frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k} - h'(\theta) \right| \leqslant \operatorname{Sup}(|\varepsilon(x_k)|, |\varepsilon(x'_k)|).$$

Nous introduirons une suite d'entiers $N_0, N_1, \ldots, N_\nu, \ldots$ définie par

$$N_0 = 0 \text{ et, pour } \nu \geqslant 1,\ N_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j q^{\nu-j}.$$

Ceci dit, définissons x_k et x'_k pour $k \geqslant 1$ par

$$x_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j q^{-j} \quad \text{et} \quad x'_k = x_k + q^{-k},$$

et posons $\rho_k = \dfrac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k}$.

Les deux suites $\{x_k\}$ et $\{x'_k\}$ tendent vers θ et on a pour tout $k \geqslant 1$

$$x_k \leqslant \theta < x'_k.$$

Par suite, si h était dérivable au point θ, la suite $\{\rho_k\}$ tendrait vers $h'(\theta)$.

On a $x_k = N_k q^{-k}$ et $x'_k = (N_k + 1) q^{-k}$.

Donc, d'après la remarque du paragraphe 3.2., on a pour tout $k \geqslant 1$

$$\rho_k = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x'_k) - g(q^r x_k)}{q^r x'_k - q^r x_k}.$$

D'après la formule (2), on a pour chaque $r \leqslant k - 1$

$$g(q^r x'_k) - g(q^r x_k) = \int_{q^r x_k}^{q^r x'_k} \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2} \right) dt.$$

On va voir que, pour $q^r x_k \leqslant t < q^r x'_k$, on a

$$[qt] - q[t] = \alpha_{r+1}.$$

On voit d'abord que, pour $0 \leqslant \nu \leqslant k$, on a

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k \leqslant N_\nu + 1 - q^{\nu-k},$$

d'où il résulte que

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k < q^\nu x'_k \leqslant N_\nu + 1. \tag{9}$$

C'est vrai pour $\nu = 0$ car $0 \leqslant x_k \leqslant (q-1) \sum_{j=1}^{k} q^{-j} = 1 - q^{-k}$.

Si $k \geqslant 2$, pour $1 \leqslant \nu \leqslant k - 1$ on a

$$q^\nu x_k = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j q^{\nu-j} = N_\nu + \sum_{j=\nu+1}^{k} \alpha_j q^{\nu-j},$$

d'où

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k \leqslant N_\nu + (q-1) \sum_{j=\nu+1}^{k} q^{\nu-j} = N_\nu + 1 - q^{\nu-k} .$$

Enfin $q^k x_k = N_k$.

Il résulte de (9) que, pour $q^r x_k \leqslant t < q^r x'_k$, avec $0 \leqslant r \leqslant k - 1$, on a

$$N_r \leqslant t < N_r + 1 \quad \text{et} \quad N_{r+1} \leqslant qt < N_{r+1} + 1 ,$$

et par suite

$$[t] = N_r \quad \text{et} \quad [qt] = N_{r+1} ,$$

d'où

$$[qt] - q\,[t] = N_{r+1} - q\,N_r ,$$

qui est bien égal à α_{r+1}.

Ceci montre que, pour $0 \leqslant r \leqslant k - 1$,

$$g\,(q^r x'_k) - g\,(q^r x_k) = (q^r x'_k - q^r x_k)\left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right),$$

et on voit ainsi que

$$\rho_k = \sum_{r=0}^{k-1} \left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right) = \sum_{r=1}^{k} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right).$$

La fonction h n'est donc certainement pas dérivable au point θ si la série

$$(10) \qquad \sum_{r=1}^{\infty} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right)$$

n'est pas convergente.

C'est certainement le cas si q est pair car alors on a pour tout r

$$\left| \alpha_r - \frac{q-1}{2} \right| \geqq \frac{1}{2}$$

puisque $2\left(\alpha_r - \dfrac{q-1}{2}\right) = 2\,\alpha_r - q + 1$ est un entier impair.

Par contre, dans le cas où q est impair, la série (10), dont tous les termes sont des entiers, peut être convergente. Cela se produit si, et seulement si, ces termes sont tous nuls à partir d'un certain rang, c'est à dire si l'on a $\alpha_j = \dfrac{q-1}{2}$ à partir d'une certaine valeur de j.

Il faut donc traiter séparément ce cas.

3.3.2. Supposons donc maintenant que q est impair et que l'on a $\alpha_j = \dfrac{q-1}{2}$ pour $j > m$, avec $m \geqslant 1$.

Alors, d'après ce que l'on vient de voir, la suite $\{\rho_k\}$ tend vers $\sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \dfrac{q-1}{2}\right)$. Donc, si h était dérivable au point θ, on devrait avoir

$$h'(\theta) = \sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right).$$

Nous allons introduire une nouvelle suite $\{x''_k\}$ définie par

$$x''_k = x_k + 2\,q^{-k}$$

et poser

$$\rho'_k = \frac{h(x''_k) - h(x_k)}{x''_k - x_k}.$$

En utilisant encore la remarque du paragraphe 3.2., on voit que

$$\rho'_k = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x''_k) - g(q^r x_k)}{q^r x''_k - q^r x_k}.$$

Si h était dérivable au point θ, la suite $\{\rho'_k\}$ devrait tendre vers $\sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \dfrac{q-1}{2}\right)$. On va montrer qu'il n'en est pas ainsi.

On voit d'abord que, si $k > m$, on a pour $0 \leqslant \nu \leqslant k-1$

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k \leqslant N_\nu + 1 - 2\,q^{\nu-k},$$

d'où il résulte que

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k < q^\nu x''_k \leqslant N_\nu + 1. \tag{11}$$

En effet, on peut d'abord écrire

$$x_k = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j q^{-j} + \sum_{j=m+1}^{k} \alpha_j q^{-j},$$

d'où

$$0 \leqslant x_k \leqslant (q-1) \sum_{j=1}^{m} q^{-j} + \frac{q-1}{2} \sum_{j=m+1}^{k} q^{-j} = 1 - \frac{1}{2}(q^{-m} + q^{-k}).$$

Mais $q^{-m} + q^{-k} = (q^{k-m} + 1)\,q^{-k} \geqslant 4q^{-k}$ puisque $q \geqslant 3$ et $k - m \geqslant 1$.

Pour $1 \leqslant \nu \leqslant k - 1$, on a, comme on l'a déjà vu,

$$q^{\nu} x_k = N_{\nu} + \sum_{j=\nu+1}^{k} \alpha_j q^{\nu-j}.$$

Ceci donne toujours $q^{\nu} x_k \geqslant N_{\nu}$.
D'autre part, si $\nu < m$, on peut écrire

$$q^{\nu} x_k = N_{\nu} + \sum_{j=\nu+1}^{m} \alpha_j q^{\nu-j} + \sum_{j=m+1}^{k} \alpha_j q^{\nu-j}$$

et on voit ainsi que

$$q^{\nu} x_k \leqslant N_{\nu} + (q-1) \sum_{j=\nu+1}^{m} q^{\nu-j} + \frac{q-1}{2} \sum_{j=m+1}^{k} q^{\nu-j}$$
$$= N_{\nu} + 1 - \frac{1}{2}(q^{\nu-m} + q^{\nu-k}),$$

d'où

$$q^{\nu} x_k \leqslant N_{\nu} + 1 - 2\, q^{\nu-k},$$

puisque

$$q^{\nu-m} + q^{\nu-k} = (q^{k-m}+1)\, q^{\nu-k} \geqq 4\, q^{\nu-k}.$$

Si $\nu \geqslant m$, on a simplement

$$q^{\nu} x_k = N_{\nu} + \frac{q-1}{2} \sum_{j=\nu+1}^{k} q^{\nu-j} = N_{\nu} + 1 - \frac{1}{2}(1 + q^{\nu-k})$$

et

$$1 + q^{\nu-k} = (q^{k-\nu}+1)\, q^{\nu-k} \geqq 4\, q^{\nu-k}.$$

Il résulte de (11) que, si $k > m$, pour $q^r x_k \leqslant t < q^r x''_k$ avec $0 \leqslant r \leqslant k - 2$, on a $[t] = N_r$ et $[qt] = N_{r+1}$, d'où $[qt] - q\,[t] = \alpha_{r+1}$.

Donc, si $k > m$, on a pour $0 \leqslant r \leqslant k - 2$

$$g(q^r x''_k) - g(q^r x_k) = (q^r x''_k - q^r x_k)\left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right),$$

et par suite

$$\rho'_k = \sum_{r=0}^{k-2}\left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{g(q^{k-1}x''_k) - g(q^{k-1}x_k)}{q^{k-1}x''_k - q^{k-1}x_k}$$
$$= \sum_{r=1}^{m}\left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{q}{2}\left(g(q^{k-1}x''_k) - g(q^{k-1}x_k)\right).$$

Notons maintenant que l'on a

$$q^{k-1} x_k = N_{k-1} + \alpha_k q^{-1} = N_{k-1} + \frac{q-1}{2q}$$

et

$$q^{k-1}\,x''_k = q^{k-1}\,x_k + 2\,q^{-1} = N_{k-1} + \frac{q+3}{2\,q},$$

et par suite, d'après la périodicité de g,

$$g\,(q^{k-1}x''_k) - g\,(q^{k-1}x_k) = g\left(\frac{q+3}{2q}\right) - g\left(\frac{q-1}{2q}\right)$$

$$= \int_{\frac{q-1}{2q}}^{\frac{q+3}{2q}} \left([qt] - q\,[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt\,.$$

Mais on a $[t] = 0$ pour $\dfrac{q-1}{2\,q} \leqslant t < \dfrac{q+3}{2\,q}$

et

$$[qt] = \frac{q-1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q-1}{2\,q} \leqslant t < \frac{q+1}{2\,q},$$

$$[qt] = \frac{q+1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q+1}{2\,q} \leqslant t < \frac{q+3}{2\,q}.$$

Par suite

$$g\,(q^{k-1}x''_k) - g\,(q^{k-1}x_k) = \frac{1}{q}\,.$$

Finalement, on voit que, pour $k > m$,

$$\rho'_k = \sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,.$$

La suite $\{\rho'_k\}$ ne tend donc pas vers $\displaystyle\sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right)$.

4. Détermination de la série de Fourier de F

Si l'on écrit la série de Fourier de F sous la forme

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k\, e^{2k\pi i x},$$

on a

$$c_k = \int_0^1 F\,(x)\, e^{-2k\pi i x}\, dx\,.$$

La formule (4) donne pour $0 \leqslant x < 1$

$$F(x) = \frac{q-1}{2}(1-x) + q^{1-x} h(q^{x-1}) .$$

On a donc $c_k = a_k + b_k$, avec

$$a_k = \frac{q-1}{2}\int_0^1 (1-x)\, e^{-2k\pi i x}\, dx \quad \text{et} \quad b_k = \int_0^1 q^{1-x} h(q^{x-1})\, e^{-2k\pi i x}\, dx .$$

4.1. On voit immédiatement que

$$a_k = \frac{q-1}{4k\pi i} \quad \text{pour} \quad k \neq 0, \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{q-1}{4} .$$

4.2. D'après la formule (3), on a pour tout x réel

$$q^{1-x} h(q^{x-1})\, e^{-2k\pi i x} = \sum_{r=0}^{\infty} q^{1-r-x} g(q^{r+x-1})\, e^{-2k\pi i x} .$$

La série est d'ailleurs uniformément convergente pour $0 \leqslant x \leqslant 1$

Il résulte de là que l'on a

$$b_k = \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^1 q^{1-r-x} g(q^{r+x-1})\, e^{-2k\pi i x}\, dx .$$

Le changement de variable $x = 1 - r + \dfrac{\log u}{\log q}$ donne

$$\int_0^1 q^{1-r-x} g(q^{r+x-1})\, e^{-2k\pi i x}\, dx = \frac{1}{\log q}\int_{q^{r-1}}^{q^r} \frac{g(u)}{u^2} \exp\left(-2k\pi i \frac{\log u}{\log q}\right) du .$$

On obtient ainsi

$$b_k = \frac{1}{\log q}\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^2} \exp\left(-2k\pi i \frac{\log u}{\log q}\right) du$$

$$= \frac{1}{\log q}\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^{2+2k\pi i/\log q}}\, du .$$

4.3. Remarquons que l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^{s+1}}\, du$$

est absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > 0$ et, si l'on désigne par $G(s)$ sa valeur, la fonction G ainsi définie est holomorphe pour $\operatorname{Re} s > 0$.

On voit que

$$b_k = \frac{1}{\log q}\, G\left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right)$$

et on est ainsi amené à déterminer la fonction G.

D'abord, comme

$$g(u) = \int_0^u \left([qt] - q\,[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt \quad \left(\text{et donc } g\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{q-1}{2q}\right),$$

une intégration par parties donne, pour $\operatorname{Re} s > 0$,

$$G(s) = -\frac{q-1}{2} \cdot \frac{q^{s-1}}{s} + \frac{1}{s} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \left([qu] - q\,[u] - \frac{q-1}{2}\right) \frac{du}{u^s}.$$

Maintenant, si l'on suppose que $\operatorname{Re} s > 2$, on peut séparer l'intégrale en trois et l'écrire

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[qu]}{u^s}\, du - q \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[u]}{u^s}\, du - \frac{q-1}{2} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{du}{u^s}.$$

On a

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{du}{u^s} = \frac{q^{s-1}}{s-1},$$

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[u]}{u^s}\, du = \int_1^{\infty} \frac{[u]}{u^s}\, du = \frac{1}{s-1}\, \zeta(s-1)$$

d'après une formule connue [10]), et, par le changement de variable $u = \frac{t}{q}$,

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[qu]}{u^s} du = q^{s-1} \int_1^{\infty} \frac{[t]}{t^s} du = \frac{q^{s-1}}{s-1} \zeta(s-1).$$

On trouve ainsi que, pour $\operatorname{Re} s > 2$,

$$G(s) = -\frac{q-1}{2} \cdot \frac{q^{s-1}}{s-1} + \frac{q^{s-1} - q}{s(s-1)} \zeta(s-1). \tag{12}$$

En raison de l'holomorphie de G, cette formule est valable pour $\operatorname{Re} s > 0$, $s \neq 1$.

En particulier, pour $k \neq 0$,

$$G\left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right) = \left(-\frac{q-1}{4k\pi i} + i\frac{q-1}{2k\pi}\left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right)^{-1} \zeta\left(\frac{2k\pi i}{\log q}\right)\right) \log q.$$

En examinant le comportement du second membre de (12) lorsque s tend vers 1, on retrouve le fait connu que $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ et on voit que

$$\begin{aligned} G(1) &= -\frac{q-1}{2} - \frac{q \log q}{2} - (q-1)\zeta'(0) \\ &= \frac{q-1}{2}(\log 2\pi - 1) - \frac{q \log q}{2} \quad \text{puisque } \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log 2\pi. \end{aligned}$$

On a ainsi les valeurs de b_k pour tous les $k \in \mathbf{Z}$, et on trouve en définitive que

$$c_0 = \frac{q-1}{2 \log q}(\log 2\pi - 1) - \frac{q+1}{4}$$

---

[10]) On a pour $\operatorname{Re} s > 1$: $\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{[u]}{u^{s+1}} du$.

On peut le voir simplement en remarquant que l'on a pour tout N entier > 1

$$\begin{aligned} s \int_1^N \frac{[u]}{u^{s+1}} du &= \sum_{n=1}^{N-1} n \int_n^{n+1} \frac{s du}{u^{s+1}} = \sum_{n=1}^{N-1} n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) + 2\left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) + 3\left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\right) + \cdots + (N-1)\left(\frac{1}{(N-1)^s} - \frac{1}{N^s}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^s} - \frac{N-1}{N^s}. \end{aligned}$$

et, pour $k \neq 0$,

$$c_k = i \frac{q-1}{2k\pi} \left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right)^{-1} \zeta\left(\frac{2k\pi i}{\log q}\right).$$

Comme, quand t tend vers l'infini,

$\zeta(it) = 0\left(|t|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$,

on voit que la série de Fourier de F est absolument convergente.

(Reçu le 25 février 1975)

Hubert Delange
Université de Paris-Sud
Mathématiques
F-91405 Orsay