# 3. DÉMONSTRATION DE LA NON DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION F

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

formule qui donne (1) en prenant $x = m$.

En posant $\lambda = \dfrac{\log x}{\log q}$, on a

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[\lambda]} \left( \sum_{n \leq x} a_r(n) \right).$$

On déduit de (6) que l'on a

$$\sum_{n \leq x} a_r(n) = \int_0^x \left( \left[ \frac{t}{q^r} \right] - q \left[ \frac{t}{q^{r+1}} \right] \right) dt + (1 + [x] - x)\, a_r([x]),$$

$$= q^{r+1} g(q^{-r-1}x) + \frac{q-1}{2} x + (1 + [x] - x)\, a_r([x]),$$

d'où

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) =$$

$$\sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1} g(q^{-r-1}x) + \frac{q-1}{2} x (1 + [\lambda]) + (1 + [x] - x)\, S_q([x]),$$

puis on vérifie que

$$\sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1} g(q^{-r-1}x) = q^{1+[\lambda]} \sum_{k=0}^{[\lambda]} q^{-k} g(q^k \cdot q^{\lambda - [\lambda] - 1})$$

$$= x\, q^{1+[\lambda]-\lambda} h(q^{\lambda-[\lambda]-1}) - h(x).$$

## 3. Démonstration de la non dérivabilité de la fonction $F$

Nous allons maintenant montrer que la fonction $F$ n'est dérivable en aucun point. En raison de la périodicité, il suffit de montrer qu'elle n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et qu'elle n'est pas dérivable à gauche au point 1.

*3.1.* On voit que ceci se ramène à montrer que la fonction $h$ n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $\left]\dfrac{1}{q}, 1\right[$ et n'est pas dérivable à gauche au point 1.

En effet, si $\dfrac{1}{q} \leqslant t < 1$, on a $0 \leqslant 1 + \dfrac{\log t}{\log q} < 1$ et (4) donne

$$F\left(1+\frac{\log t}{\log q}\right) = -\frac{q-1}{2}\cdot\frac{\log t}{\log q}+\frac{1}{t}h(t)\,.$$

Ceci vaut encore pour $t = 1$ car $F(1) = h(1) = 0$.

Ainsi on a pour $\frac{1}{q} \leqslant t \leqslant 1$

$$h(t) = tF\left(1+\frac{\log t}{\log q}\right)+\frac{q-1}{2\log q}\,t\log t\,.$$

Par suite, si $F$ était dérivable au point $\theta$ de $]0, 1[$, $h$ serait dérivable au point $q^{\theta-1}$ de $\left]\frac{1}{q}, 1\right[$. Si $F$ était dérivable à gauche en 1, $h$ serait dérivable à gauche en 1.

En fait, nous montrerons que $h$ n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et n'est pas dérivable à gauche au point 1. [8])

*3.2.* Nous utiliserons la remarque suivante:

Si $x = \frac{a}{q^k}$, où $a \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$h(x) = \sum_{r=0}^{k-1} q^{-r} g(q^r x)$$

puisque, dès que $r \geqslant k$, $q^r x$ est un entier et $g(q^r x) = 0$.

Par suite, si $x = \frac{a}{q^k}$ et $x' = \frac{b}{q^k}$, avec $a$ et $b \in \mathbf{Z}$, $a \neq b$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\frac{h(x') - h(x)}{x' - x} = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x') - g(q^r x)}{q^r x' - q^r x}\,.$$

*3.3.* Il est très facile de montrer que la fonction $h$ n'est pas dérivable à gauche au point 1.

Cela résulte immédiatement de ce que, si $\xi_k = 1 - q^{-k}$, la suite $\left\{\frac{h(1) - h(\xi_k)}{1 - \xi_k}\right\}$ tend vers $+\infty$.

---

[8]) La fonction $h$ n'est donc dérivable en aucun point. Dans le cas où $q = 2$, $-h$ est la fonction $f$ de Trollope. Celui-ci indique que cette fonction $f$ n'est dérivable en aucun point.

En effet, d'après la remarque précédente,

$$\frac{h(1) - h(\xi_k)}{1 - \xi_k} = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r) - g(q^r \xi_k)}{q^r - q^r \xi_k} = \sum_{r=0}^{k-1} q^{k-r} \left(g(q^r) - g(q^r \xi_k)\right).$$

Mais, comme $q^r \xi_k = q^r - q^{r-k}$, d'après la périodicité de $g$ on a pour chaque $r \leqslant k - 1$

$$g(q^r) - g(q^r \xi_k) = g(1) - g(1 - q^{r-k}) = \int_{1-q^{r-k}}^{1} \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt,$$

ce qui est égal à $q^{r-k} \frac{q-1}{2}$ car, pour $1 - q^{r-k} \leqslant t < 1$, $[t] = 0$ et $[qt] = q - 1$ puisque $q - 1 \leqslant q - q^{r-k+1} \leqslant qt < q$. On voit donc que

$$\frac{h(1) - h(\xi_k)}{1 - \xi_k} = k \frac{q-1}{2}.$$

*3.3.* Soit maintenant $\theta$ un nombre de l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Nous allons montrer que $h$ n'est pas dérivable en $\theta$.

Nous nous baserons sur l'observation suivante:

Si $h$ était dérivable en $\theta$, quelles que soient les suites $\{x_k\}$ et $\{x'_k\}$ tendant vers $\theta$, avec $x_k \leqslant \theta < x'_k$ pour chaque $k$, la suite $\left\{\frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k}\right\}$ tendrait vers $h'(\theta)$. [9])

*3.3.1.* Remarquons d'abord que l'on peut écrire

$$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j q^{-j},$$

où les $\alpha_j$ sont des entiers satisfaisant à $0 \leqslant \alpha_j \leqslant q - 1$ et il y a une infinité de $j$ pour lesquels $\alpha_j \neq q - 1$ (l'écriture du nombre $\theta$ en base $q$ étant $0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j \dots$).

---

[9]) Il existerait une fonction $\varepsilon$ continue en $\theta$ et nulle en ce point telle que l'on ait pour tout $t$

$$h(t) = h(\theta) + (t - \theta) h'(\theta) + (t - \theta) \varepsilon(t),$$

et l'on aurait

$$\frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k} = h'(\theta) + \frac{(x'_k - \theta)\varepsilon(x'_k) + (\theta - x_k)\varepsilon(x_k)}{x'_k - x_k},$$

d'où

$$\left| \frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k} - h'(\theta) \right| \leqslant \operatorname{Sup}(|\varepsilon(x_k)|, |\varepsilon(x'_k)|).$$

Nous introduirons une suite d'entiers $N_0, N_1, \ldots, N_\nu, \ldots$ définie par

$$N_0 = 0 \text{ et, pour } \nu \geqslant 1,\ N_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j\, q^{\nu-j}.$$

Ceci dit, définissons $x_k$ et $x'_k$ pour $k \geqslant 1$ par

$$x_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, q^{-j} \quad \text{et} \quad x'_k = x_k + q^{-k},$$

et posons $\rho_k = \dfrac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k}$.

Les deux suites $\{x_k\}$ et $\{x'_k\}$ tendent vers $\theta$ et on a pour tout $k \geqslant 1$

$$x_k \leqslant \theta < x'_k.$$

Par suite, si $h$ était dérivable au point $\theta$, la suite $\{\rho_k\}$ tendrait vers $h'(\theta)$.

On a $x_k = N_k\, q^{-k}$ et $x'_k = (N_k + 1)\, q^{-k}$.

Donc, d'après la remarque du paragraphe 3.2., on a pour tout $k \geqslant 1$

$$\rho_k = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x'_k) - g(q^r x_k)}{q^r x'_k - q^r x_k}.$$

D'après la formule (2), on a pour chaque $r \leqslant k - 1$

$$g(q^r x'_k) - g(q^r x_k) = \int_{q^r x_k}^{q^r x'_k} \left( [qt] - q\,[t] - \frac{q-1}{2} \right) dt.$$

On va voir que, pour $q^r x_k \leqslant t < q^r x'_k$, on a

$$[qt] - q\,[t] = \alpha_{r+1}.$$

On voit d'abord que, pour $0 \leqslant \nu \leqslant k$, on a

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k \leqslant N_\nu + 1 - q^{\nu-k},$$

d'où il résulte que

(9) $$N_\nu \leqslant q^\nu x_k < q^\nu x'_k \leqslant N_\nu + 1.$$

C'est vrai pour $\nu = 0$ car $0 \leqslant x_k \leqslant (q-1) \sum_{j=1}^{k} q^{-j} = 1 - q^{-k}$.

Si $k \geqslant 2$, pour $1 \leqslant \nu \leqslant k - 1$ on a

$$q^\nu x_k = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j\, q^{\nu-j} = N_\nu + \sum_{j=\nu+1}^{k} \alpha_j\, q^{\nu-j},$$

d'où

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k \leqslant N_\nu + (q-1) \sum_{j=\nu+1}^{k} q^{\nu-j} = N_\nu + 1 - q^{\nu-k}.$$

Enfin $q^k x_k = N_k$.

Il résulte de (9) que, pour $q^r x_k \leqslant t < q^r x'_k$, avec $0 \leqslant r \leqslant k-1$, on a

$$N_r \leqslant t < N_r + 1 \quad \text{et} \quad N_{r+1} \leqslant qt < N_{r+1} + 1,$$

et par suite

$$[t] = N_r \quad \text{et} \quad [qt] = N_{r+1},$$

d'où

$$[qt] - q[t] = N_{r+1} - qN_r,$$

qui est bien égal à $\alpha_{r+1}$.

Ceci montre que, pour $0 \leqslant r \leqslant k-1$,

$$g(q^r x'_k) - g(q^r x_k) = (q^r x'_k - q^r x_k)\left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right),$$

et on voit ainsi que

$$\rho_k = \sum_{r=0}^{k-1} \left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right) = \sum_{r=1}^{k} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right).$$

La fonction $h$ n'est donc certainement pas dérivable au point $\theta$ si la série

(10) $$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right)$$

n'est pas convergente.

C'est certainement le cas si $q$ est pair car alors on a pour tout $r$

$$\left|\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right| \geqq \frac{1}{2}$$

puisque $2\left(\alpha_r - \dfrac{q-1}{2}\right) = 2\alpha_r - q + 1$ est un entier impair.

Par contre, dans le cas où $q$ est impair, la série (10), dont tous les termes sont des entiers, peut être convergente. Cela se produit si, et seulement si, ces termes sont tous nuls à partir d'un certain rang, c'est à dire si l'on a $\alpha_j = \dfrac{q-1}{2}$ à partir d'une certaine valeur de $j$.

Il faut donc traiter séparément ce cas.

*3.3.2.* Supposons donc maintenant que $q$ est impair et que l'on a $\alpha_j = \dfrac{q-1}{2}$ pour $j > m$, avec $m \geqslant 1$.

Alors, d'après ce que l'on vient de voir, la suite $\{\rho_k\}$ tend vers $\sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \dfrac{q-1}{2}\right)$. Donc, si $h$ était dérivable au point $\theta$, on devrait avoir

$$h'(\theta) = \sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right).$$

Nous allons introduire une nouvelle suite $\{x''_k\}$ définie par

$$x''_k = x_k + 2\,q^{-k}$$

et poser

$$\rho'_k = \frac{h(x''_k) - h(x_k)}{x''_k - x_k}.$$

En utilisant encore la remarque du paragraphe 3.2., on voit que

$$\rho'_k = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x''_k) - g(q^r x_k)}{q^r x''_k - q^r x_k}.$$

Si $h$ était dérivable au point $\theta$, la suite $\{\rho'_k\}$ devrait tendre vers $\sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \dfrac{q-1}{2}\right)$. On va montrer qu'il n'en est pas ainsi.

On voit d'abord que, si $k > m$, on a pour $0 \leqslant \nu \leqslant k-1$

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k \leqslant N_\nu + 1 - 2\,q^{\nu-k},$$

d'où il résulte que

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k < q^\nu x''_k \leqslant N_\nu + 1. \tag{11}$$

En effet, on peut d'abord écrire

$$x_k = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j q^{-j} + \sum_{j=m+1}^{k} \alpha_j q^{-j},$$

d'où

$$0 \leqslant x_k \leqslant (q-1) \sum_{j=1}^{m} q^{-j} + \frac{q-1}{2} \sum_{j=m+1}^{k} q^{-j} = 1 - \frac{1}{2}(q^{-m} + q^{-k}).$$

Mais $q^{-m} + q^{-k} = (q^{k-m} + 1)\,q^{-k} \geqslant 4q^{-k}$ puisque $q \geqslant 3$ et $k - m \geqslant 1$.

Pour $1 \leqslant v \leqslant k-1$, on a, comme on l'a déjà vu,

$$q^v x_k = N_v + \sum_{j=v+1}^{k} \alpha_j q^{v-j}.$$

Ceci donne toujours $q^v x_k \geqslant N_v$.
D'autre part, si $v < m$, on peut écrire

$$q^v x_k = N_v + \sum_{j=v+1}^{m} \alpha_j q^{v-j} + \sum_{j=m+1}^{k} \alpha_j q^{v-j}$$

et on voit ainsi que

$$q^v x_k \leqslant N_v + (q-1) \sum_{j=v+1}^{m} q^{v-j} + \frac{q-1}{2} \sum_{j=m+1}^{k} q^{v-j}$$

$$= N_v + 1 - \frac{1}{2}(q^{v-m} + q^{v-k}),$$

d'où

$$q^v x_k \leqslant N_v + 1 - 2\, q^{v-k},$$

puisque

$$q^{v-m} + q^{v-k} = (q^{k-m}+1)\, q^{v-k} \geqq 4\, q^{v-k}.$$

Si $v \geqslant m$, on a simplement

$$q^v x_k = N_v + \frac{q-1}{2} \sum_{j=v+1}^{k} q^{v-j} = N_v + 1 - \frac{1}{2}(1 + q^{v-k})$$

et

$$1 + q^{v-k} = (q^{k-v}+1)\, q^{v-k} \geqq 4\, q^{v-k}.$$

Il résulte de (11) que, si $k > m$, pour $q^r x_k \leqslant t < q^r x''_k$ avec $0 \leqslant r \leqslant k-2$, on a $[t] = N_r$ et $[qt] = N_{r+1}$, d'où $[qt] - q\,[t] = \alpha_{r+1}$.

Donc, si $k > m$, on a pour $0 \leqslant r \leqslant k-2$

$$g(q^r x''_k) - g(q^r x_k) = (q^r x''_k - q^r x_k)\left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right),$$

et par suite

$$\rho'_k = \sum_{r=0}^{k-2} \left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{g(q^{k-1} x''_k) - g(q^{k-1} x_k)}{q^{k-1} x''_k - q^{k-1} x_k}$$

$$= \sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{q}{2}\left(g(q^{k-1} x''_k) - g(q^{k-1} x_k)\right).$$

Notons maintenant que l'on a

$$q^{k-1} x_k = N_{k-1} + \alpha_k q^{-1} = N_{k-1} + \frac{q-1}{2q}$$

et

$$q^{k-1} x''_k = q^{k-1} x_k + 2q^{-1} = N_{k-1} + \frac{q+3}{2q},$$

et par suite, d'après la périodicité de $g$,

$$g(q^{k-1}x''_k) - g(q^{k-1}x_k) = g\left(\frac{q+3}{2q}\right) - g\left(\frac{q-1}{2q}\right)$$

$$= \int_{\frac{q-1}{2q}}^{\frac{q+3}{2q}} \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt .$$

Mais on a $[t] = 0$ pour $\frac{q-1}{2q} \leqslant t < \frac{q+3}{2q}$

et

$$[qt] = \frac{q-1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q-1}{2q} \leqslant t < \frac{q+1}{2q},$$

$$[qt] = \frac{q+1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q+1}{2q} \leqslant t < \frac{q+3}{2q}.$$

Par suite

$$g(q^{k-1}x''_k) - g(q^{k-1}x_k) = \frac{1}{q}.$$

Finalement, on voit que, pour $k > m$,

$$\rho'_k = \sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

La suite $\{\rho'_k\}$ ne tend donc pas vers $\sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right)$.

## 4. Détermination de la série de Fourier de $F$

Si l'on écrit la série de Fourier de $F$ sous la forme

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{2k\pi i x},$$

on a

$$c_k = \int_0^1 F(x) e^{-2k\pi i x} dx .$$