

## 4. Expressions allied to $\Delta_a(\pi)$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Since the choice of  $g$  is arbitrary, we change  $g$  to another primitive root  $g^r$  with  $(r, p-1) = 1$ ,  $r = i \pmod{5}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . This does not alter  $\Delta_a$  (as  $\Delta_a$  is independent of  $g$ ) but replaces  $\pi$  by any desired  $\pi_i$  so that  $\Delta_a(\pi) = \Delta_a$  (any other  $\pi$ ). Note that such an  $r$  exists, for all we want is, for  $i = 1, 2, 3, 4$ , a  $\lambda$  such that  $(i+5\lambda, p-1) = 1$ . Now  $i+5\lambda$  takes infinitely many prime values as  $\lambda$  takes positive integer values since  $(i, 5) = 1$ ; so  $\lambda$  may be chosen so that  $i+5\lambda$  is a prime avoiding the primes occurring in  $p-1$ .

#### 4. EXPRESSIONS ALLIED TO $\Delta_a(\pi)$

We fix our  $\pi$  now with  $(g/\pi)_5 = \zeta$  and normalize it too. It is clear that there are only 3 expressions allied to  $\Delta_a(\pi)$  viz  $(-a/p)_Z (4a/\pi)_5 \cdot \pi \cdot \pi^\sigma +$  conjugates,  $(-a/p)_Z (4a/\pi)_5 \cdot \pi^\sigma \cdot \pi^{\sigma^2} +$  conjugates and  $(-a/p)_Z (4a/\pi)_5 \cdot \pi^{\sigma^2} \cdot \pi^{\sigma^3} +$  conjugates. This is so because changing the first term of  $\Delta_a(\pi)$  fixes the changes in the other terms (otherwise we will not even get a rational integer!). Let us look at the first of these (the others would be similar), which equals  $\text{Tr} [(-a/p)_Z (4a/\pi)_5 \cdot \pi \pi^\sigma]$ . We have the following theorem:

**THEOREM 3.**  $\text{Tr} [(-a/p)_Z (4a/\pi)_5 \cdot \pi \pi^\sigma] = \Delta_{au} - 1(\pi)$ , where  $(u/p)_Z = 1$  and  $(u/\pi)_5 = (4a/\pi)_5$ .

*Proof.* We have

$$\begin{aligned} \Delta_a(\pi) &= \text{Tr} [(-a/p)_Z (4a/\pi)_5 \cdot \pi \cdot \pi^{\sigma^3}] \\ &= \text{Tr} [(-a/p)_Z (4a/\pi^\sigma)_5 \cdot \pi^\sigma \cdot \pi^{\sigma^3}] \text{ by 3 on letting } \pi \rightarrow \pi^\sigma, \\ &= \text{Tr} [(-a/p)_Z (16a^2/\pi)_5 \cdot \pi^\sigma \cdot \pi] \text{ since } (4a/\pi^\sigma)_5 = (g^v/\pi_2)_5 \\ &= (g^v/\pi_1)_5^2 = (4a/\pi)_5^2 = (16a^2/\pi)_5, \\ &= \text{Tr} [(-au/p)_Z (4(au)/\pi)_5 \cdot \pi \pi^\sigma], \text{ where } (u/p)_Z = 1 \text{ and } (u/p)_5 \\ &= (4a/\pi)_5. \end{aligned}$$

Now writing  $a$  for  $au$  we get the theorem.

It follows that the expressions allied to  $\Delta_a(\pi)$  also represent the number of solutions of the congruence (1) for a suitable value of  $a$ .

#### 5. THE SET $\{\Delta_a \mid a = 1, 2, 3, \dots, p-1\}$

Dickson's paper on cyclotomy [1] includes the following Theorem (theorem 8 of [1]). Let  $p \equiv 1 \pmod{5}$  be a rational prime. Then the Diophantine equations