

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

divisor of exponential polynomials f and g , then the set of zeros of h is all but at most finitely many of the common zeros of f and g . We have shown this to be the case if at least one of f and g is a simple exponential sum.

We see that a natural formulation of the Shapiro problem is: *If f and g are exponential polynomials, is it the case that there exists an exponential polynomial h , the set of zeros of which is exactly the set of common zeros of f and g ?*

We recall that it is not, without qualification, the case that if every zero of $f \in E'$ is a zero of $g \in E'$ then f divides g in the ring E' ; for example $(1 - e^z)/z$ is not an element of E' (its set of integer zeros is not a finite union of arithmetic progressions). Equivalently, it follows that if $\prod_{l=1}^m (e^{z/2^l} + 1)$ divides an exponential polynomial $g(z)$ in the ring E' for all $m = 1, 2, \dots$ then $1 - e^z$ divides $g(z)$ in E' .

The ideas we have mentioned attack an apparently analytic problem by essentially algebraic methods. Indeed, in a sense, "approximate" methods appear doomed to failure by virtue of the following proposition mentioned to the authors by H. L. Montgomery:

PROPOSITION 3. *Let $\mu(r)$ be any positive-real-valued function decreasing to 0 as $r \rightarrow \infty$. Then there exist exponential polynomials f, g such that for every $r_0 > 0$ there is an $r > r_0$ and a $z \in \mathbb{C}$ with $r_0 < |z| < r$ such that $0 < |f(z) - g(z)| \leq \mu(r)$.*

Proof. Define an increasing sequence $\{n_l\}$ of integers by $n_0 = 0$ and $n_{l+1} - n_l \geq -\log(\mu(2^{n_l})/2\pi)/\log 2$ and write $\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l 2^{-n_l}$. Let $f(z) = 1 - e^{2\pi i z}$ and $g(z) = 1 - e^{2\pi i \alpha z}$, and write $z_l = 2^{n_l}$, $l = 0, 1, 2, \dots$. Then $f(z_l) = 0$ and $0 < |g(z_l)| = |1 - e^{2\pi i \alpha z_l}| = 2 |\sin \pi \alpha z_l| \leq \mu(2^{n_l})$, as required. One notices that $f(z), g(z)$ have the property that there are infinitely many pairs z_l, z'_l with $f(z_l) = 0$, $g(z'_l) = 0$ and $|z_l - z'_l| \leq 2\mu(|z_l|)$.

REFERENCES

- [1] BERENSTEIN, C. A. and M. A. DOSTAL. A lower Estimate for Exponential Sums. *Bull. Amer. Math. Soc.* 80 (1974), pp. 687-691.
- [2] DICKSON, D. G. Asymptotic Distribution of Exponential Sums. *Publ. Math. Debrecen* 11 (1964), pp. 295-300.
- [3] JAGER, H. A Note on the Vanishing of Power Sums. *Ann. Univ. Sci. Bud sect. Math.* 10 (1967), pp. 13-16.
- [4] LECH, C. A Note on Recurring Series. *Ark. Mat.* 2 (1953), pp. 417-421.

- [5] MAHLER, K. Eine Arithmetische Eigenschaft der Taylorkoeffizienten rationaler Funktionen. *Proc. Ac. Amsterdam* 38 (1935), pp. 51-60.
- [6] — On the Taylor coefficients of rational functions. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 52 (1956), pp. 39-48.
- [7] MORENO, C. J. The Zeros of Exponential Polynomials. *Comp. Math.* 26 (1973), pp. 69-78.
- [8] POLYA, G. Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer transzendenten Funktionen. *Münchener Sitzungsberichte* 50 (1920), pp. 285-290.
- [9] van der POORTEN, A. J. A Note on the Zeros of Exponential Polynomials. (to appear).
- [10] RITT, J. F. A Factorisation theory for Functions $\sum_{i=1}^n a_i e^{\alpha_i z}$. *Trans. Amer. Math. Soc.* 29 (1927), pp. 584-596.
- [11] — On the Zeros of Exponential Polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* 31 (1929), pp. 680-686.
- [12] — Algebraic Combinations of Exponentials. *Trans. Amer. Math. Soc.* 31 (1929), pp. 654-679.
- [13] SHAPIRO, H. S. The Expansion of mean-periodic functions in series of exponentials. *Comm. Pure and Appl. Math.* 11 (1958), pp. 1-21.
- [14] SHIELDS, A. On Quotients of Exponential Polynomials. *Comm. Pure and Appl. Math.* 16 (1963), pp. 27-31.
- [15] SKOLEM, Th. Ein Verfahren zur Behandlung gewisser Exponentialer Gleichungen und Diophantischer Gleichungen. *C.r. 8 congr. scand. à Stockholm. 1934*, pp. 163-188.
- [16] TIJDEMAN, R. On a Conjecture of Turán and Erdős. *Indag. Math.* 28 (1966), pp. 374-383.
- [17] — On the Number of Zeros of General Exponential Polynomials. *Indag. Math.* 33 (1971), pp. 1-7.
- [18] TITCHMARSH, E. C. *The Theory of Functions*. Oxford Univ. Press, 1952.
- [19] SHAPIRO, H. N. On a Theorem concerning Exponential Polynomials. *Comm. Pure and Appl. Math.* 12 (1959), pp. 487-500.

(Reçu le 5 décembre 1974)

A. J. van der Poorten

School of Mathematics
The University of New South Wales
Kensington, NSW 2033
Australia

R. Tijdeman

Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit Leiden
Wassenaarseweg 80
Leiden
Nederland

Vide-leer-empty