NOMBRE DE CLASSES D'UN ORDRE D'EICHLER ET VALEUR AU POINT -1 DE LA FONCTION ZÊTA D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL

par Marie-France Vigneras

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

On obtient dans cet article la partie fractionnaire de la valeur $\zeta_k(-1)$ au point -1 de la fonction zêta d'un corps de nombres totalement réel k, en la déduisant de la formule du nombre de classes des idéaux à gauche d'un ordre d'Eichler, donnée par Eichler en 1954. On étudie ensuite en détail le cas particulier des corps quadratiques réels.

Dans le premier chapitre, on développe l'arithmétique des corps de quaternions totalement définis dont la théorie est due à M. Eichler. Il est nécessaire pour lire ce chapitre de connaître une partie de la théorie des algèbres centrales simples sur des corps de nombres; le meilleur livre de référence est celui de Deuring [2]. Nous étudions les ordres d'Eichler et leurs idéaux localement libres; nous reférons principalement à Eichler [4] et à Pizer [9]. Notre but est de calculer le nombre H de classes des idéaux à gauche d'un ordre d'Eichler [4], le nombre T de types des ordres d'Eichler [9] et le nombre H^+ de classes des idéaux quasi-normaux [10]. Pour cela, nous avons introduits des nombres $p(n)$ analogues aux traces des matrices de Brandt.

Nous remercions chaleureusement H. Cohen qui a calculé sur ordinateur ces nombres pour les ordres d'Eichler sur le corps des nombres rationnels, d'invariant (D_1, D_2) avec $D_1 < 47$, $D_2 \leqslant 101$ et $47 \leqslant D_1 \leqslant 101$, $D_2 \leqslant 31$.

Le nombre de classes h_k du corps k divise $2H$. Dans le chapitre 2 nous exprimons cette divisibilité par une congruence entre la valeur $\zeta_k(-1)$ au point -1 de la fonction zêta de k et les nombres de classes relatifs de certaines extensions quadratiques de k. Nous déterminons ainsi la partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)$.

Soit ξ_p une racine d'ordre p de l'unité (sauf si $p = 2$ où $\xi_2 = e^{i\pi/2}$); on note $h'_p = h_{k(\xi_p)}/h_k$, w_p l'indice des unités de k dans celles de $k(\xi_p)$ et s_p le nombre d'idéaux premiers $\mathfrak{p} \mid p$ inertes dans $k(\xi_p)$. Si $[k(\xi_p) : k] > 2$ ou s'il existe un idéal premier $\mathfrak{p} \mid p$ de k décomposé dans $k(\xi_p)$, la valeur au point -1 de la fonction zêta d'un corps de nombres totalement réel k est entière en p. Sinon la p-partie fractionnaire de $2^{2-n}\zeta_k(-1)$ est celle de

$$\frac{h'_p 2^{s_p}}{w_p \prod_{\mathfrak{p}\mid p} (1 - N\mathfrak{p})}$$

S'il existe un idéal premier $\mathfrak{p} \mid 2$ de k décomposé dans $k(\xi_2)$ alors $\zeta_k(-1)/2^{n-3}$ est entier en 2, sinons sa partie fractionnaire est celle de

$$\frac{h'_2 \, 2^{2^s+1}}{w_2 \prod_{\mathfrak{p}\mid 2} (1 - N\mathfrak{p})}$$

Ce résultat est analogue à ceux de Brown [1] et de Greenberg [5] qui viennent de paraître. Si k est le sous-corps réel maximal du p^m-ème corps cyclotomique, l'exposant de p dans $\zeta_k(-1)$ est égal à $-m$ pour les nombres premiers p réguliers impairs. Si $p = 2$, l'exposant de 2 dans $\zeta_k(-1)$ est $2^{m-2} - m - 1$ et pour $m \geqslant 5$ le nombre de classes relatif de $\mathbf{Q}(\xi_{2m}, \xi_3)$ est divisible par 3.

Enfin, dans le chapitre 3, nous reprenons les travaux des chapitres précédents, en les améliorant, lorsque k est un corps quadratique.

Si k est un corps quadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ on note $\zeta_m(.)$ sa fonction zêta et $h(m)$ son nombre de classes. Le nombre de classes $H_m(D_1, D_2)$ d'un ordre d'Eichler $\mathfrak{O}$ sur $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ d'invariant (D_1, D_2) est

$$H(m) = h(m) \frac{\zeta_m(-1)}{2} \prod_{\mathfrak{p}\mid D_1} (1 - N\mathfrak{p}) \prod_{\mathfrak{p}\mid D_2} (1 + N\mathfrak{p}) + a(m) \frac{h(-m)}{8}$$
$$+ b(m) \frac{h(-3m)}{12} + c(m) \frac{h(n)\,h(n')}{4}$$

où $a(m)$, $b(m)$, $c(m)$ sont des entiers bien définis. Si $c(m) \neq 0$, l'unité fondamentale ε de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ est de norme 1 et $n = 2 - \mathrm{Tr}\,\varepsilon$ (modulo les carrés), $nn' = m$ ou $4m$.

L'expression suivante est un entier:

$$\frac{\zeta_m(-1)}{2} + \alpha(m) \frac{h(-m)}{8} + \beta(m) \frac{h(-3m)}{6} + \gamma(m) \frac{h(n)\,h(n')}{4}$$

où $\alpha(m)$, $\beta(m)$, $\gamma(m)$ sont des entiers bien définis. Elle représente, si $m = p$ est un nombre premier, la caractéristique d'Euler-Poincaré du groupe modulaire de $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ calculée par Hirzebruch.

Je remercie vivement J. Martinet pour les conseils qu'il m'a donnés et l'intérêt avec lequel il a suivi ce travail.

Chapitre premier. Ordres d'Eichler et idéaux quasi-normaux

1. *Corps de quaternions totalement définis* [3]

Un corps de quaternions totalement défini est une algèbre centrale simple A sur un corps de nombres totalement réel k telle que pour toute place infinie v de k, l'algèbre $A_v = k_v \underset{k}{\otimes} A$ soit isomorphe au corps des quaternions réels. On note k_v le complété de k pour la place v, $v_{\mathfrak{p}}$ la valuation ultramétrique associée à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de k, $A_{\mathfrak{p}} = k_{v\mathfrak{p}} \underset{k}{\otimes} A$ l'algèbre étendue.

L'algèbre $A_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe à un corps gauche ou à $M_2(k_{\mathfrak{p}})$; dans le premier cas, l'idéal premier $\mathfrak{p}$ est dit ramifié dans A. Le nombre d'idéaux premiers ramifiés a même parité que le degré n_k du corps k (théorème de Hasse), leur produit D_1 s'appelle le discriminant de A. On a une réciproque: à tout produit D_1 d'idéaux premiers dont le nombre a même parité que n_k correspond un unique corps de quaternions totalement défini, ramifié exactement en ces idéaux premiers.

On notera Nrd (.) et Trd (.) la norme réduite et la trace réduite de A sur k. On notera $N(.)$ la norme absolue de k, R son anneau d'entiers et $R_{\mathfrak{p}}$ celui de $k_{\mathfrak{p}}$. Le groupe des unités d'un anneau X sera noté X^*.

Les entiers de A ne forment pas un anneau; on définit la notion d'ordre et on montre que tout ordre est contenu dans un ordre maximal. Si $A_{\mathfrak{p}}$ est un corps gauche, les entiers forment un anneau; on a donc un ordre maximal unique. Si $A_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe à $M_2(k_{\mathfrak{p}})$, les ordres maximaux sont de la forme $a\, M_2(R_{\mathfrak{p}})\, a^{-1}$, où $a \in M_2(R_{\mathfrak{p}})^*$.

2. *Ordres d'Eichler* [4], [9], [10]

Soit D_1 un discriminant d'un corps de quaternions A totalement défini sur un corps de nombres k et soit D_2 un produit d'idéaux premiers de k sans facteurs carrés et premier à D_1. On appelle *ordre d'Eichler sur k d'invariant* (D_1, D_2) un ordre de A localement maximal aux places $\mathfrak{p}$ ne divisant pas D_2 et sinon isomorphe à l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R_{\mathfrak{p}})$ avec $c \in \mathfrak{p}\, R_{\mathfrak{p}}$.

Les *ordres maximaux de A* sont les ordres d'invariant $(D_1, 1)$.

On dit que deux ordres sont du même *genre* lorsqu'ils sont localement isomorphes. Le genre d'un ordre est l'ensemble des ordres qui lui sont localement isomorphes. L'ensemble des ordres d'Eichler d'invariant (D_1, D_2) donné forme un genre.

Le *discriminant* d'un ordre d'Eichler d'invariant (D_1, D_2) est égal à $D_1^2\, D_2^2$.

3. *Idéaux quasi-normaux* [3], [4], [9], [10]

Un idéal *quasi-normal* I est un idéal de A localement principal dont l'ordre à gauche $\mathfrak{O}$ est un ordre d'Eichler. Il existe donc pour tout $\mathfrak{p}$ un élément $a_\mathfrak{p} \in A_\mathfrak{p}^*$ tel que:

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p}\, a_\mathfrak{p}$$

L'ordre à droite de $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ est $\mathfrak{O}'_\mathfrak{p} = a_\mathfrak{p}^{-1}\, \mathfrak{O}_\mathfrak{p}\, a_\mathfrak{p}$ et l'ordre à droite $\mathfrak{O}'$ de $\mathfrak{J}$ est donc un ordre d'Eichler appartenant au genre de $\mathfrak{O}$.

Un idéal *normal* est un idéal quasi-normal dont les ordres sont maximaux.

Un idéal est *entier* s'il est contenu dans son ordre à gauche. Il est *bilatère* si son ordre à gauche est égal à son ordre à droite.

Les idéaux entiers principaux à gauche de $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ se mettent de façon unique sous la forme $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}\, a_\mathfrak{p}$, avec:

$$\text{Si } \mathfrak{p} \mid D_1, \qquad a_\mathfrak{p} = \tilde{\pi}_\mathfrak{p}^{\,n}$$

où $\tilde{\pi}$ est une uniformisante de l'ordre maximal $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$, c'est-à-dire un élément entier de $A_\mathfrak{p}$, dont la norme réduite est égale à une uniformisante $\pi_\mathfrak{p}$ de $R_\mathfrak{p}$.

$$\text{Si } \mathfrak{p} \mid D_2, \qquad a_\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^{\,n} & c \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^m \end{pmatrix} \qquad \text{ou bien}$$

$$a_\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\mathfrak{p}^n \\ \pi_\mathfrak{p}^{m+1} & d \end{pmatrix}$$

où n et m sont des entiers positifs ou nuls, où $c \in R_\mathfrak{p}$ est réduit modulo $\mathfrak{p}^m$ et où $d \in R_\mathfrak{p}$ est réduit modulo $\mathfrak{p}^{n+1}$.

$$\text{Si } \mathfrak{p} \nmid D_1\, D_2, \qquad a_\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^n & c \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^m \end{pmatrix}$$

où n et m sont des entiers positifs et où $c \in R_\mathfrak{p}$ est réduit modulo $\mathfrak{p}^m$.

Les idéaux bilatères de $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ sont les puissances de l'idéal $\mathfrak{P}_\mathfrak{p}$ bilatère de $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ égal à:

$$\text{Si } \mathfrak{p} \mid D_1, \qquad \mathfrak{P}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p}\, \tilde{\pi}_\mathfrak{p}$$

$$\text{Si } \mathfrak{p} \mid D_2, \qquad \mathfrak{P}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\mathfrak{p} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } \mathfrak{p} \nmid D_1 D_2 \qquad \mathfrak{P}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} \pi_\mathfrak{p}$$

4. *Idéaux bilatères* [4], [6], [9], [10]

Soit $\mathfrak{O}$ un ordre d'Eichler de A. Un idéal *premier* $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{O}$ est un idéal bilatère de $\mathfrak{O}$ qui ne se factorise pas de façon non triviale en produit de deux idéaux bilatères de $\mathfrak{O}$. L'idéal $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{P}$ est un idéal premier de k. On a deux cas:

$$\begin{aligned} &\text{Si } \mathfrak{p} \mid D_1 D_2, \quad \text{alors } \mathfrak{O}\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Nrd}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p} \\ &\text{Si } \mathfrak{p} \nmid D_1 D_2, \quad \text{alors } \mathfrak{O}\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \quad \text{et} \quad \mathrm{Nrd}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}^2 \end{aligned}$$

Les idéaux bilatères de $\mathfrak{O}$ forment un groupe abélien et tout idéal bilatère de $\mathfrak{O}$ se factorise de façon unique en produit d'idéaux premiers de $\mathfrak{O}$. La factorisation de l'idéal $\mathfrak{O}\mathfrak{p}$ que nous venons de rappeler montre qu'un idéal bilatère de $\mathfrak{O}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\mathfrak{D}I$ où $\mathfrak{D}$ est un idéal bilatère de $\mathfrak{O}$ dont la norme divise $D_1\ D_2$ et où I est un idéal du centre.

Un idéal bilatère $\mathfrak{B}$ est déterminé par sa norme et par son ordre. Il est pratique d'utiliser le même symbole $\mathfrak{B}$ pour tous les idéaux bilatères de norme donnée $\mathfrak{B}$. Si $\mathfrak{I}$ est un idéal quasi normal. on a alors l'égalité

$$\mathfrak{I}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{I}\ ;$$

dans le membre de gauche, $\mathfrak{B}$ représente l'idéal bilatère de norme B de l'ordre à droite de $\mathfrak{I}$ et dans le membre de droite, $\mathfrak{B}$ représente l'idéal bilatère de l'ordre à gauche de $\mathfrak{I}$ de même norme.

L'idéal principal $\mathfrak{O}a$ est entier et bilatère si et seulement s'il existe deux idéaux I et D de k où $D \mid D_1\ D_2$ tels que:

$$\begin{aligned} &- \ a \in \mathfrak{O} \\ (1) \qquad &- \ \big(Nrd(a)\big) = D\, I^2 \\ &- \ a\, \pi_\mathfrak{p}^{-s_\mathfrak{p}} \in \mathfrak{D}_\mathfrak{p} \quad \text{si } s_\mathfrak{p} = v_\mathfrak{p}(I) \text{ pour tout } \mathfrak{p} \\ &- \ Trd(a) \in D\, I \end{aligned}$$

5. *Sous-corps commutatifs maximaux* [4], [5], [9]

Soit L une extension quadratique de k totalement imaginaire. Soit O' l'ordre maximal de L et O un ordre de L. Le *conducteur* de O est le plus grand idéal de O' contenu dans O. Il est engendré par un idéal de k, noté $f(O)$:

$$f(O) = \{a \in k \mid a\,O' \subseteq O\}$$

A tout idéal entier f de k correspond un ordre unique de L de conducteur f.

Le nombre de classes des idéaux inversibles de O est [2]:

(2) $$h(O) = \frac{h_L N f(O)}{[R_L^* : O^*]} \prod_{\mathfrak{p} \mid f(O)} \left(1 - \frac{\left(\frac{L}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

où h_L, R_L^*, désignent respectivement le nombre de classes de L, le groupe des unités de L, et où O^* est le groupe des unités de O. Le symbole $\left(\frac{L}{\mathfrak{p}}\right)$ est égal à:

(3) $$\left(\frac{L}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathfrak{p} \text{ est ramifié dans } L \\ 1 & \text{si } \mathfrak{p} \text{ est décomposé dans } L \\ -1 & \text{si } \mathfrak{p} \text{ est inerte dans } L \end{cases}$$

Soit $W(O)$ le groupe des racines de l'unité contenues dans O. *L'indice des unités de O* c'est-à-dire l'indice [7]:

(4) $$Q(O) = [O^* : W(O)\,R^*]$$

est égal à 1 ou 2.

On a aussi:

$$Q(O) = [Nrd\,O^* : R^{*2}]$$

Pour que l'indice des unités $Q(O)$ soit égal à 2 il faut et il suffit qu'il existe une unité $\varepsilon \in O^*$ telle que $\varepsilon\,\varepsilon'$ ne soit pas un carré dans k (on note ε' le conjugué de ε sur k). L'indice des unités de L est l'indice des unités de son ordre maximal.

Les *sous corps commutatifs maximaux* du corps de quaternions totalement défini A de discriminant D_1 sont les extensions quadratiques L de k totalement imaginaires telles que les idéaux premiers $\mathfrak{p} \mid D_1$ ne se décomposent pas dans L.

Soit O un ordre de conducteur $f(O)$ (confondu avec $f(O)\,O'$) d'une extension quadratique de k totalement imaginaire. Pour qu'il existe un ordre d'Eichler $\mathfrak{O}$ sur k d'invariant (D_1, D_2) tel que $O = \mathfrak{O} \cap k(O)$ il faut et il suffit que

Si $\mathfrak{p} \mid D_1$, alors $\mathfrak{p}$ ne se décompose pas dans $k(O)$

(5) $$(f(O), D_1) = 1$$

Si $\mathfrak{p} \mid D_2$, alors $\mathfrak{p} \mid f(O)$ ou bien $\mathfrak{p}$ ne reste pas inerte dans $k(O)$.

On note $\left\{\frac{O}{\cdot}\right\}$ le « symbole d'Eichler ». Par définition:

(6)
$$\left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathfrak{p} \mid f(O) \\ \left(\dfrac{k(O)}{\mathfrak{p}}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose:

$$E_{(D_1, D_2)}(O) = \prod_{\mathfrak{p} \mid D_1} \left(1 - \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right) \prod_{\mathfrak{p} \mid D_2} \left(1 + \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right)$$

On peut mettre les conditions (5) sous la forme équivalente:

(5′)
$$E_{(D_1, D_2)}(O) \neq 0$$

Si $\mathfrak{O}_1$ et $\mathfrak{O}_2$ sont deux ordres d'Eichler sur k de même invariant contenant O, il existe un idéal C inversible de O tel que $\mathfrak{O}_1 C = C \mathfrak{O}_2$.

6. *Types d'ordres et classes d'idéaux*

On dit que deux ordres $\mathfrak{O}$ et $\mathfrak{O}'$ sont du *même type* lorsqu'ils sont R-isomorphes. Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe $a \in A^*$ tel que:

(7)
$$\mathfrak{O}' = a \mathfrak{O} a^{-1},$$

car tout k-automorphisme de A est intérieur.

Le nombre de classes dans un genre est fini. On note $T_{(D_1, D_2)}$ ou T s'il n'y a pas d'ambiguité, *le nombre de types des ordres d'invariant* (D_1, D_2).

On dit que deux idéaux I et I' à gauche de $\mathfrak{O}$ appartiennent à la *même classe* s'il existe $a \in A^*$ tel que:

(8)
$$\mathfrak{I}' = \mathfrak{I} a .$$

Le nombre de classes dans un genre est fini. On note $H_{(D_1, D_2)}$ ou H s'il n'y a pas d'ambiguité le nombre de classes des idéaux quasi-normaux à gauche d'un ordre d'Eichler d'invariant (D_1, D_2). Cette notation est justifiée car le nombre de classes des idéaux quasi-normaux à gauche d'un ordre d'Eichler $\mathfrak{O}$ est le même pour tous les ordres ayant même invariant. Nous allons le montrer:

Soit $\mathfrak{O}$ et $\mathfrak{O}'$ deux ordres d'Eichler de même invariant.

Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de k tel que $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ choisissons $a_{\mathfrak{p}} \in A^*_{\mathfrak{p}}$ tel que

$$\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}} = a_{\mathfrak{p}}^{-1} \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{p}} .$$

L'idéal quasi-normal $\mathfrak{J}$ défini par

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} & \text{si } \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}} \\ \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{p}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

est à gauche de $\mathfrak{O}$ et à droite de $\mathfrak{O}'$. La bijection entre les idéaux à gauche de $\mathfrak{O}'$ et ceux à gauche de $\mathfrak{O}$: $\mathfrak{F} \to \mathfrak{J}\,\mathfrak{F}$ définit par passage aux classes une bijection entre les classes à gauche de $\mathfrak{O}$ et les classes à gauche de $\mathfrak{O}'$.

On définit aussi une autre relation d'équivalence sur l'*ensemble des idéaux quasi-normaux des ordres d'Eichler sur k d'invariant* (D_1, D_2) *donné*, à savoir:

Deux idéaux $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J}'$ sont équivalents si et seulement s'il existe $a, b \in A^*$ tels que

$$\mathfrak{J}' = a\,\mathfrak{J}\,b^{-1}\,. \tag{9}$$

Le nombre de classes des idéaux quasi-normaux des ordres d'Eichler sur k d'invariant (D_1, D_2) pour cette relation d'équivalence est fini et on le note $H^+_{(D_1,D_2)}$ ou H^+ s'il n'y a pas d'ambiguité.

7. *Les nombres* $p(n)$

Soit N un idéal entier de k et $\mathfrak{O}$ un ordre d'Eichler sur k d'invariant (D_1, D_2). Nous notons $\pi^*(N)$ le nombre d'idéaux principaux bilatères entiers de $\mathfrak{O}$ de norme réduite N; $\pi^*(N)$ est égal à 0 ou à 1, et est toujours nul si N n'est pas principal ou si $N \neq D I^2$ où D et I sont deux idéaux de k tels que $D \mid D_1 D_2$.

Notons $(n_1), \ldots, (n_t)$ un système de représentants des idéaux principaux de k de la forme $D I^2$, modulo les carrés des idéaux principaux de k. On a

$$\begin{aligned} &\pi^*(N) = 0 \quad \text{si} \quad N \neq (n_j m^2) \quad \text{avec } m \in k \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant t \\ &\pi^*(n_j m^2) = \pi^*(n_j)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Nous choisissons un système $\mathfrak{J}_1 \ldots \mathfrak{J}_H$ de répresentants des classes des idéaux à gauche de $\mathfrak{O}$. Nous notons $\pi_i^*(n)$ le nombre d'idéaux entiers principaux de norme (n), bilatères de l'ordre à droite $\mathfrak{O}_i$ de l'idéal $\mathfrak{J}_i$. Nous posons

$$p(n) = \sum_{i=1}^{H} \pi_i^*(n) \tag{11}$$

PROPOSITION 1.2. *Soit* $(n_1), \ldots, (n_t)$ *un système de représentants des idéaux* $D I^2$ *principaux, avec* $D \mid D_1 D_2$ *modulo les carrés des idéaux principaux de k. Soit* H, T, H^+ *respectivement*:

— *le nombre de classes des idéaux* $\mathfrak{J}$ *à gauche d'un ordre d'Eichler* $\mathfrak{O}$ *d'invariant* (D_1, D_2) *pour la relation* $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}\, a,\, a \in A^*$;

— *le nombre de types des ordres d'Eichler d'invariant* (D_1, D_2);

— *le nombre de classes des idéaux quasi-normaux des ordres d'Eichler d'invariant* (D_1, D_2) *pour la relation* $\mathfrak{J}' = a\, \mathfrak{J}\, b^{-1},\, a, b \in A^*$.

On a:

$$
\begin{aligned}
H &= p(1) \\
T &= \frac{1}{h_k\, 2^s} \sum_{j=1}^{t} p(n_j) \qquad (12)\\
H^+ &= \frac{1}{h_k\, 2^s} \sum_{j=1}^{t} p(n_j)^2
\end{aligned}
$$

où h_k *est le nombre de classes des idéaux de* k *et* 2^s *le nombre de diviseurs de* $D_1 D_2$.

Preuve. On a $\pi_i^*(1) = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant H$, donc $H = \sum_{i=1}^{H} \pi_i^*(1) = p(1)$. Deux idéaux $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J}'$ vérifiant $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}\, a,\, a \in A^*$ ont leurs ordres à droite du même type, ce qui implique:

$$H = \sum_{i=1}^{T} H_i$$

où H_i désigne le nombre de classes des idéaux à gauche de $\mathfrak{O}$, dont l'ordre à droite est du type de $\mathfrak{O}_i$ et $(\mathfrak{O}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant T$ est un système de représentants des types d'ordres.

Fixons un idéal $\mathfrak{J}$ à gauche de $\mathfrak{O}$ à droite de $\mathfrak{O}_i$. Alors H_i est le nombre de classes des idéaux $\mathfrak{J}\,\mathfrak{B}\, a$ où $a \in A^*$ et où $\mathfrak{B}$ est un idéal bilatère de $\mathfrak{O}_i$ Deux idéaux $\mathfrak{J}\,\mathfrak{B}\, a$ et $\mathfrak{J}\,\mathfrak{B}'\, a'$ sont équivalents si et seulement si $\mathfrak{B}$ est équivalent à $\mathfrak{B}'$; donc H_i *est égal au nombre de classes des idéaux bilatères de* $\mathfrak{O}_i$.

LEMME 1.2. *Le nombre de classes des idéaux bilatères d'un ordre d'Eichler* $\mathfrak{O}_i$ *d'invariant* (D_1, D_2) *est égal à*

$$H_i = \frac{h_k\, 2^s}{\sum_{j=1}^{t} \pi_i^*(n_j)}\,. \qquad (13)$$

Preuve. Un idéal bilatère de $\mathfrak{O}_i$ s'écrit de façon unique $\mathfrak{D}\, I$ où $\mathfrak{D}$ est un idéal bilatère de $\mathfrak{O}_i$ dont la norme réduite D divise $D_1 D_2$ et où I est un idéal de k. Lorsque I_l, $1 \leqslant l \leqslant h_k$ parcourt un système de représentants des classes des idéaux de k, les classes des idéaux $\mathfrak{D}\, I_l^2$ où $D \mid D_1 D_2$, modulo les carrés des idéaux principaux sont distinctes. Le nombre $\sum_{j=1}^{t} \pi_i^* (n_j)$ est le nombre des idéaux bilatères $\mathfrak{D}\, I_l$ qui sont principaux. On note 2^s le nombre d'idéaux $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire le nombre de diviseurs de $D_1 D_2$ et on a (13).

Le nombre $\pi_i^* (n)$ est le même pour tous les ordres du type de $\mathfrak{O}_i$, ce qui implique:

$$p(n) = \sum_{i=1}^{T} H_i \pi_i^* (n)$$

On a:
$$\sum_{j=1}^{t} p(n_j) = \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{T} H_i \pi_i^* (n_j) = \sum_{i=1}^{T} H_i \sum_{j=1}^{t} \pi_i^* (n_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{T} h_k 2^s = T h_k 2^s$$

d'où:

$$T = \frac{1}{h_k 2^s} \sum_{j=1}^{t} p(n_j) .$$

Deux idéaux $\mathfrak{I}'$ et $\mathfrak{I}$ vérifiant $\mathfrak{I}' = a \mathfrak{I} b^{-1}$, a et $b \in A^*$ ont leurs ordres à droite et leurs ordres à gauche du même type, ce qui implique:

$$H^+ = \sum_{\substack{i=1 \ldots T \\ j=1 \ldots T}} H_{i,j}^+$$

où $H_{i,j}^+$ désigne le nombre de classes pour la relation (9) des idéaux dont l'ordre à gauche est du type de $\mathfrak{O}_i$ et l'ordre à droite du type de $\mathfrak{O}_j$.

Lemme 1.2. *Le nombre de classes $H_{i,j}^+$ est égal à:*

$$H_{i,j}^+ = \frac{H_i H_j}{h_k 2^s} \sum_{l=1}^{t} \pi_i^* (n_l) \pi_j^* (n_l) . \tag{14}$$

Preuve. On introduit les nombres $\pi_{i,j}^* (n)$ qui désignent le nombre d'idéaux entiers à gauche de $\mathfrak{O}_i$ à droite de $\mathfrak{O}_j$ de norme réduite (n) Nrd $(\mathfrak{I})$ et de la forme $a \mathfrak{I} b^{-1}$ où $\mathfrak{I}$ est un idéal fixé à gauche de $\mathfrak{O}_i$ à droite de $\mathfrak{O}_j$. On a $\pi_{ij}^* (n) = 1$ ou 0. Si $\pi_{ij}^* (n) = 1$, il existe a et b tels que les idéaux $\mathfrak{O}_i a$ et $\mathfrak{O}_j b$ soient bilatères et $(n(ab)) = (n)$. Le symbole « $\overline{\overline{\scriptstyle 2}}$ » signifie l'égalité modulo le carré d'un idéal principal. Si $(n) \,\overline{\overline{\scriptstyle 2}}\, (m)$ alors $\pi_i^* (n) = \pi_i^* (m)$ et $\pi_{i,j}^* (n) = \pi_{i,j}^* (m)$.

On démontre de façon tout à fait analogue que dans le lemme précédent l'égalité

$$H_{i,j}^{+} = \frac{h_k 2^s}{\sum_{l=1}^{t} \pi_{i,j}^{*}(n_l)} \tag{15}$$

Le nombre $\pi_{i,j}^{*}(n_l)$ n'est pas nul si et seulement s'il existe u_o et v_o tels que:

$$(n_l) \underset{2}{=} (n_{u_o} n_{v_o}), \quad \pi_i^{*}(n_{u_o}) = \pi_j^{*}(n_{v_o}) = 1 .$$

Dans ce cas:

$$\sum_{(n_u n_v) \underset{2}{=} (n_l)} \pi_i^{*}(n_u) \pi_j^{*}(n_v) = \pi_i^{*}(n_{u_o}) \pi_j^{*}(n_{v_o}) \sum_{(n_u n_v) \underset{2}{=} (n_l)} \pi_i^{*}(n_u n_{u_o}) \pi_j^{*}(n_v n_{v_o}) .$$

On a

$$(n_u n_v n_{u_o} n_{v_o}) \underset{2}{=} (n_l^2) \underset{2}{=} (1)$$

$$(n_u n_{u_o}) \underset{2}{=} (n_v n_{v_o})$$

d'où:

$$\sum_{(n_u n_v) \underset{2}{=} (n_l)} \pi_i^{*}(n_u) \pi_j^{*}(n_v) = \sum_{w=1}^{t} \pi_i^{*}(n_w) \pi_j^{*}(n_w) .$$

On en déduit que

$$\pi_{i,j}^{*}(n_l) = \frac{\sum_{(n_u n_v) \underset{2}{=} (n_l)} \pi_i^{*}(n_u) \pi_j^{*}(n_v)}{\sum_{w=1}^{t} \pi_i^{*}(n_w) \pi_j^{*}(n_w)} .$$

En reportant la valeur de $\pi_{i,j}^{*}(n_l)$ dans la formule (15), on obtient

$$H_{i,j}^{+} = h_k 2^s \frac{\sum_{w=1}^{t} \pi_i^{*}(n_w) \pi_j^{*}(n_w)}{\sum_{l=1}^{t} \sum_{(n_u n_v) \underset{2}{=} (n_l)} \pi_i^{*}(n_u) \pi_j^{*}(n_v)} .$$

Le dénominateur est le développement du produit

$$\sum_{u=1}^{t} \pi_i^{*}(n_u) . \sum_{v=1}^{t} \pi_j^{*}(n_v) .$$

Nous faisons apparaître les nombres H_i et H_j

$$H_i = \frac{h_k 2^s}{\sum_{u=1}^{t} \pi_i^{*}(n_u)} \qquad H_j = \frac{h_k 2^s}{\sum_{v=1}^{t} \pi_j^{*}(n_v)}$$

en écrivant $H^{+}_{i,j}$ sous la forme

$$H^{+}_{i,j} = \frac{1}{h_k 2^s} \sum_{w=1}^{t} \pi_i^*(n_w)\, \pi_j^*(n_w) \frac{h_k 2^s}{\sum_{u=1}^{t} \pi_i^*(n_u)} \cdot \frac{h_k 2^s}{\sum_{v=1}^{t} \pi_j^*(n_v)}$$

et nous obtenons l'égalité (14).
Nous sommons sur i, j pour obtenir H^{+}:

$$H^{+} = \frac{1}{h_k 2^s} \sum_{i,j,w=1 \ldots T} H_i H_j \pi_i^*(n_w)\, \pi_j^*(n_w)$$

$$H^{+} = \frac{1}{h_k 2^s} \sum_{w=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} H_j \pi_j^*(n_w) \sum_{i=1}^{T} H_i \pi_i^*(n_w)$$

$$H^{+} = \frac{1}{h_k 2^s} \sum_{w=1}^{t} p(n_w)^2 .$$

8. *Calcul de $p(n)$*

L'objet de ce paragraphe est le calcul des nombres $p(n)$ qui nous permet avec la proposition 1.2 d'obtenir une formule pour les nombres H, T et H^{+}.

Proposition 1.3. *On a*

$$(16) \quad \begin{aligned} H = p(1) &= \frac{h_k \zeta_k(-1)\, \Phi_k(D_1, D_2)}{2^{nk-1}} + \sum_{O} \frac{w(O)-1}{2\,w(O)} E_{D_1,D_2}(O)\, h(O) \\ p(n) &= \frac{1}{2} \sum_{O} E_{D_1,D_2}(O)\, h(O) \qquad \text{si}\,(n) \underset{2}{\neq} (1) \end{aligned}$$

la somme $\sum_O$ porte sur les ordres O des extensions quadratiques de k totalement imaginaires contenant un élément $a \notin k$ tel que

- $(Nrd(a)) = D I^2 = (n)$
- $Trd(a) \in D I$
- $a \pi_{\mathfrak{p}}^{-s_{\mathfrak{p}}} \in O_{\mathfrak{p}}$ si $s_{\mathfrak{p}} = v_{\mathfrak{p}}(I)$ *pour tout* $\mathfrak{p}$.

Une conséquence importante de cette proposition est le corollaire suivant:

Corollaire 1.1. *Le nombre de classes du centre h_k divise $2H$.*

Preuve. D'après la proposition 1.2., on a:

$$H = p(1)$$

$$T = \frac{1}{h_k 2^s} \sum_{j=1}^{t} p(n_j) = \frac{1}{h_k 2^s}\left[p(1) + \sum_{j=2}^{t} p(n_j)\right]$$

si on suppose que $(n_1) = (1)$.

Le nombre de classes du centre h_k divise $h(O)$ car O est un ordre d'une extension quadratique totalement imaginaire de k, donc h_k divise $2p(n_j)$ pour $2 \leqslant j \leqslant t$.

On a:

$$H = T h_k 2^s - \sum_{j=2}^{t} p(n_j)$$

donc h_k divise $2H$.

Remarque. Si n est pair, on peut choisir $(D_1, D_2) = (1, 1)$ alors $H_{1,1} = h_k T_{1,1}$ et $H_{1,1}/h_k$ est un entier.

Démonstration de la proposition 1.3. On a $p(n) = 0$ si $(n) \underset{2}{\neq} (n_j)$ $1 \leqslant j \leqslant t$. Nous supposons que $(n) \underset{2}{=} (n_j)$. Soit $(\mathfrak{O}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant T$, un système de représentants des ordres d'Eichler de A d'invariant (D_1, D_2). On note $\mathfrak{O}_i(n)$ l'ensemble des éléments $\alpha \in \mathfrak{O}_i$ engendrant un idéal bilatère de $\mathfrak{O}_i$ de norme (n). Pour que $\mathfrak{O}_i(n)$ ne soit pas vide il faut et il suffit que l'idéal bilatère de $\mathfrak{O}_i$ de norme (n) soit principal et alors:

$$\mathfrak{O}_i(n) = \mathfrak{O}_i^* \alpha .$$

Comme le corps de quaternions A est totalement défini, le groupe R_k^* des unités de k est d'indice fini e_i dans le groupe $\mathfrak{O}_i^*$ des unités de $\mathfrak{O}_i$ et nous avons alors:

$$1 = \pi_i^*(n) = \frac{| R^* \backslash \mathfrak{O}_i(n) |}{e_i}$$

où on note $| R^* \backslash \mathfrak{O}_i(n) |$ le nombre de classes d'équivalences définies sur $\mathfrak{O}_i(n)$ par la relation $\gamma' = u\gamma$, $u \in R^*$. On fixe une clôture algébrique $\hat{k}$ de k. A tout $\alpha \in \mathfrak{O}_i(n)$, $\alpha \notin k$ correspond une extension quadratique de k, contenue dans $\hat{k}$, totalement imaginaire et isomorphe à $k(\alpha)$. On considère l'ordre O de cette extension isomorphe à $k(\alpha) \cap \mathfrak{O}_i$. On pose

$$O(n) = \{\alpha \notin k \,/\, \alpha \in O \cap \mathfrak{O}_i(n)\}$$

c'est-à-dire, $O(n)$ est égal à l'ensemble des éléments α de O vérifiant:

$$(17)\quad \begin{cases} - \; Nrd(\alpha) = (n) = D\,I^2 \\ - \; Trd(\alpha) \in D\,I \\ - \; \alpha\,\pi_{\mathfrak{p}}^{-s_{\mathfrak{p}}} \in O_{\mathfrak{p}} \text{ si } s_{\mathfrak{p}} = v_{\mathfrak{p}}(I) \quad \text{pour tout } \mathfrak{p} \\ - \; \alpha \notin k\,. \end{cases}$$

On remarque que si $(n) \underset{2}{\neq} (1)$ alors $\mathfrak{O}_i(n) \cap k = \varnothing$ dans ce cas:

$$O(n) = \mathfrak{O}_i(n) \cap O\,.$$

Si $(n) \underset{2}{=} (1)$ alors $\mathfrak{O}_i(n) \cap k = R^*$ et dans ce cas:

$$O(n) = \mathfrak{O}_i(n) \cap O - R^*\,.$$

Soit $g_i(O)$ le nombre d'ordres isomorphes à O contenus dans $\mathfrak{O}_i$. On a

$$\pi_i^*(1) = \frac{1}{e_i}\Big[1 + \sum_O g_i(O)\,|\,R^* \setminus O(n)\,|\Big]$$

$$\pi_i^*(n) = \frac{1}{e_i} \sum_O g_i(O)\,|\,R^* \setminus O(n)\,| \quad \text{si } (n) \underset{2}{\neq} (1)\,.$$

La somme $\sum_O$ porte sur les ordres $O = \mathfrak{O}_i \cap k(\alpha)$ les éléments $\alpha \in \hat{k}$ étant astreints aux conditions (17).

Ces conditions impliquent que les idéaux premiers $\mathfrak{p} \mid D$ sont ramifiés dans $k(\alpha)$. L'idéal $O\,\alpha$ est égal à $\mathfrak{D}\,I$ où $\mathfrak{D}$ est l'unique idéal de O de norme D. On a:

$$O(n) = O^*\alpha \qquad \text{si } (n) \underset{2}{\neq} (1)$$
$$O(1) = O^* - R^*\,.$$

On note $w(O)$ l'indice du groupe R_k^* des unités de k dans le groupe O^* des unités de O et nous avons

$$\pi_i^*(1) = \frac{1}{e_i}\Big[1 + \sum_O g_i(O)\big(w(O) - 1\big)\Big]$$

$$\pi_i^*(n) = \frac{1}{e_i} \sum_O g_i(O)\,w(O) \quad \text{si } (n) \underset{2}{\neq} (1)$$

Nous en déduisons pour les nombres $h(n)$ les formules

$$(18)\quad \begin{cases} p(1) = \sum_{i=1}^{T} H_i \pi_i^*(1) = \sum_{i=1}^{T} \frac{H_i}{e_i} + \sum_{i=1}^{T} \sum_O \frac{H_i\,g_i(O)}{e_i}\big(w(O) - 1\big) \\ p(n) = \sum_{i=1}^{T} H_i \pi_i^*(n) = \sum_{i=1}^{T} \sum_O \frac{H_i\,g_i(O)}{e_i}\,w(O) \end{cases}$$

Nous avons la relation [4]:

$$(19)\qquad \sum_{i=1}^{T} \frac{H_i}{e_i} = h_k \zeta_k(-1)\, \Phi_k(D_1, D_2)\, 2^{1-n_k}$$

où h_k, ζ_k (.), n désignent le nombre de classes, la fonction zêta et le degré du corps k et

$$\Phi_k(D_1, D_2) = \prod_{\mathfrak{p} | D_1} (1 - N\mathfrak{p}) \prod_{\mathfrak{p} | D_2} (1 + N\mathfrak{p}) .$$

Nous intervertissons dans les formules (18) la sommation sur les types d'ordres et la sommation sur les ordres quadratiques:

$$(20)\qquad \begin{aligned} h(1) &= \frac{h_k \zeta_k(-1)\, \Phi_k(D_1, D_2)}{2^{n_k - 1}} + \sum_{O} (w(O) - 1) \sum_{i=1}^{T} \frac{H_i g_i(O)}{e_i} \\ h(n) &= \sum_{O} w(O) \sum_{i=1}^{T} \frac{H_i g_i(O)}{e_i} \qquad \text{si } (n) \underset{2}{\neq} (1) . \end{aligned}$$

Lemme 1.3. *On a*

$$\sum_{i=1}^{T} \frac{H_i g_i(O)}{e_i} = \frac{h(O)}{2\, w(O)} E_{D_1, D_2}(O) .$$

Ce lemme et les relations (20) nous donnent la proposition 1.3.

Démonstration du lemme 1.3. On fixe un ordre d'Eichler $\mathfrak{O}$ d'invariant (D_1, D_2) tel que $\mathfrak{O} \cap k(O) = O$. Pour qu'un tel ordre $\mathfrak{O}$ existe il faut et il suffit que $E_{D_1, D_2}(O)$ soit non nul (§.4). Un idéal à gauche de $\mathfrak{O}$ dont l'ordre à droite $\mathfrak{O}'$ vérifie $\mathfrak{O}' \cap k(O) = O$ s'écrit de façon unique sous la forme $\mathfrak{D} I$ où $\mathfrak{D}$ est un idéal bilatère de $\mathfrak{O}$ dont la norme réduite est un produit d'idéaux premiers non ramifiés dans $k(O)$ et divisant $D_1 D_2$ et I un idéal inversible de O. On remarque que $E_{D_1, D_2}(O)$ s'il n'est pas nul est égal au nombre des idéaux $\mathfrak{D}$ car

$$E_{D_1, D_2}(O) = \prod_{\mathfrak{p} | D_1} \left(1 - \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right) \prod_{\mathfrak{p} | D_2} \left(1 + \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right) .$$

On note h_i le nombre de classes des idéaux I inversibles dans O engendrant un idéal $\mathfrak{O} I$ dont l'ordre à droite est du type de $\mathfrak{O}_i$ et $I_1 \dots I_{h_i}$ un système de représentants de ces idéaux; on note $h(O)$ le nombre de classes des idéaux inversibles de O. On a:

$$h(O) = \sum_{i=1}^{T} h_i .$$

Si $h_i \neq 0$, le nombre H_i qui est égal au nombre de classes des idéaux bilatères de $\mathfrak{O}_i$, donc des idéaux à gauche de $\mathfrak{O}$ dont l'ordre à droite est du type de $\mathfrak{O}_i$ est aussi égal au nombre de classes des $h_i E_{D_1,D_2}(O)$ idéaux $\mathfrak{D}I_j$ $1 \leqslant j \leqslant h_i$ pour la relation:

$$\mathfrak{D}' I' = \mathfrak{D} I a \qquad a \in A^* .$$

Pour qu'un idéal $\mathfrak{O}_i\, a$ soit de la forme $\mathfrak{D}I$ il faut et il suffit que $O\, a^{-1} \subset \mathfrak{O}_i$. On pose

$$O_i' = \{a \in A^* \,/\, a\, O\, a^{-1} \subset \mathfrak{O}_i\} .$$

pour que:

$$\mathfrak{O}_i\, a = \mathfrak{O}_i\, x \qquad x \in k(O)$$

il faut et il suffit que $a \in \mathfrak{O}_i^*\, k\,(O)^*$. Le nombre d'idéaux à gauche de $\mathfrak{O}_i$ de la forme $\mathfrak{D}I_j$ (où $\mathfrak{D}$ représente ici l'idéal bilatère de $\mathfrak{O}_i$ de norme réduite D) qui sont principaux est égal à $|\, \mathfrak{O}_i^*\, k\,(O)^* \setminus \mathfrak{O}_i' \,|$.

On note $\mathfrak{O}_i''$ le sous-groupe de $\mathfrak{O}_i'$ formé des $a \in A^*$ tels que $a\, O\, a^{-1} = O$. Pour $a \in \mathfrak{O}_i''$ et $x \in O$ on a:

$$a\, x\, a^{-1} = x \text{ ou } x', \qquad\qquad x' = \text{le conjugué de } x \text{ sur } k.$$

On choisit $\alpha \in A$ tel que $\alpha\, x\, \alpha^{-1} = x'$ pour $x \in k\,(O)$. On a:

$$\mathfrak{O}_i'' = \{a \in A^* \,/\, a \text{ ou } \alpha^{-1} a \text{ commute avec les éléments de } k\,(O)\}$$

donc

$$\mathfrak{O}_i'' = k\,(O)^* \cup \alpha\, k\,(O)^* .$$

On a:

$$|\, \mathfrak{O}_i'' \setminus \mathfrak{O}_i' \,| = g_i(O)$$
$$|\, k\,(O)^* \setminus \mathfrak{O}_i' \,| = 2\, g_i(O)$$
$$|\, \mathfrak{O}_i^*\, k\,(O)^* \setminus \mathfrak{O}_i' \,| = \frac{|\, k\,(O)^* \setminus \mathfrak{O}_i' \,|}{|\, O^* \setminus \mathfrak{O}_i^* \,|} = \frac{2\, g_i(O)\, w\,(O)}{e_i}$$

Nous obtenons donc pour H_i lorsque $h_i \neq 0$

$$H_i = h_i\, E_{D_1,D_2}(O)\, \frac{e_i}{2\, g_i(O)\, w\,(O)}$$

d'où:

$$\sum_{i=1}^{T} \frac{H_i\, g_i(O)}{e_i} = \sum_{i=1}^{T} h_i\, \frac{E_{D_1,D_2}(O)}{2\, w\,(O)} = \frac{h\,(O)}{2\, w\,(O)}\, E_{D_1,D_2}(O) .$$

Nous obtenons donc le lemme 1.3.

CHAPITRE 2. PARTIE FRACTIONNAIRE DE $\zeta_k(-1)$

1. *Théorème général*

La relation $2H/h_k \in \mathbf{Z}$ du corollaire 1.1 nous donne une formule pour la partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)$ dans laquelle ne subsiste apparemment aucun lien avec les quaternions. Cette formule est la base de ce chapitre et nous la redonnons avec suffisamment de détails pour qu'il ne soit pas utile de se référer au chapitre précédent.

D'après la proposition 1.3 démontrée dans le chapitre précédent, la relation $2H/h_k \in \mathbf{Z}$ s'écrit:

$$\zeta_k(-1)\, \Phi_k(D_1, D_2)\, 2^{2-n_k} + \sum_O \frac{w(O)-1}{w(O)} E_{D_1, D_2}(O)\, h'(O) \in \mathbf{Z}$$

ou encore

PROPOSITION 2.1. *On a pour tout corps de nombres k totalement réel*

$$(21) \qquad \zeta_k(-1)\, \Phi_k(D_1, D_2)\, 2^{2-n} \equiv \sum_O E_{D_1, D_2}(O) \frac{h'(O)}{w(O)} \qquad \mod 1\,.$$

Dans cette relation,

n est le degré absolu de k et $\zeta_k(.)$ sa fonction zêta,

D_1 est un produit d'idéaux premiers de k, sans facteurs carrés, dont le nombre a même parité que le degré n du corps k

D_2 est aussi un produit d'idéaux premiers de k, sans facteurs carrés et $(D_1, D_2) = 1$.

La somme $\sum_O$ porte sur tous les ordres O des extensions quadratiques de k totalement imaginaires tels que $w(O) = [O^* : R^*]$ soit supérieur strictement à 1. *Cette somme est donc finie. Si h (O) est le nombre de classes des idéaux inversibles de O, on pose $h'(O) = h(O)/h_k$.*

Enfin, on a

$$\Phi_k(D_1, D_2) = \prod_{\mathfrak{p}\mid D_1} (1 - N\mathfrak{p}) \prod_{\mathfrak{p}\mid D_2} (1 + N\mathfrak{p})$$

$$E_{D_1, D_2}(O) = \prod_{\mathfrak{p}\mid D_1} \left(1 - \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right) \prod_{\mathfrak{p}\mid D_2} \left(1 + \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right)$$

où $\left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\} = 1$ *si $\mathfrak{p}$ divise le conducteur $f(O)$ de O, sinon*

$$\left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\} = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathfrak{p} \text{ est ramifié dans } k(O) \\ 1 \text{ si } \mathfrak{p} \text{ est décomposé dans } k(O) \\ -1 \text{ si } \mathfrak{p} \text{ est inerte dans } k(O) \end{cases}$$

Soit p un nombre premier. Tout nombre rationnel x peut s'écrire de façon unique sous la forme $\frac{a}{p^n} + b$ où n est un entier positif ou nul, a un entier premier à p, compris entre 1 et $p^n - 1$ (si $n = 0$, on prend $a = 0$) et b un nombre rationnel p-entier, $\frac{a}{p^n}$ s'appelle la p-partie fractionnaire de x.

Pour p impair (resp. $p = 2$) on note ξ_p une racine de l'unité d'ordre p (resp. d'ordre 4).

On note w_p l'indice des unités de k dans celles de $k(\xi_p)$ et s_p le nombre d'idéaux premiers $\mathfrak{p} \mid p$ inertes dans $k(\xi_p)$. Si $h_{k(\xi_p)}$ est le nombre de classes de $k(\xi_p)$ on pose $h'_p = h_{k(\xi_p)}/h_k$.

Théoreme II.1. *Soit p un nombre premier impair; la valeur au point -1 de la fonction zêta d'un corps de nombres totalement réel k est entière en p si $[k(\xi_p) : k] > 2$ ou s'il existe un idéal premier $\mathfrak{p} \mid p$ de k décomposé dans $k(\xi_p)$. Sinon, la p-partie fractionnaire de $2^{2-n}\zeta_k(-1)$ est celle de*

$$\frac{h'_p 2^{s_p}}{w_p \prod_{\mathfrak{p}\mid p} (1 - N\mathfrak{p})}.$$

S'il existe un idéal premier $\mathfrak{p} \mid 2$ de k décomposé dans $k(\xi_2)$ alors $\zeta_k(-1)/2^{n-3}$ est entier en 2, sinon sa partie fractionnaire est celle de

$$\frac{h'_2 2^{s_2+1}}{w_2 \prod_{\mathfrak{p}\mid 2} (1 - N\mathfrak{p})}.$$

La partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)$ a été également calculée par Brown [1] et Greenberg [5]. Le théorème ne donne que la 2-partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)/2^{n-3}$; nous avons étudié des cas particuliers: corps quadratiques réels, corps cyclotomiques et obtenus la 2-partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)/2^{n-1}$.

Démonstration du théorème II.1.

Premier cas: p est un nombre premier impair. On choisit $D_2 = (1)$, D_1 un produit d'idéaux premiers $\mathfrak{p} \mid p$ (en nombre convenable). Alors

$$\Phi_k(D_1, 1) = \prod_{\mathfrak{p} \mid D_1} (1 - N\mathfrak{p})$$

est premier à p, la p-partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)\, 2^{2-n}$ est celle de:

$$\frac{1}{\Phi_k(D_1, 1)} \sum_{\xi_p \in O} E_{D_1,1}(O) \frac{h'(O)}{w(O)}$$

car si $\xi_p \notin O$, alors $\dfrac{1}{w(O)}$ est entier en p.

La condition sur le degré $[k(\xi_p) : k] = 2$ pour qu'il existe une p-partie fractionnaire est claire puisque la somme porte sur des ordres O d'extensions quadratiques de k. S'il existe $\mathfrak{p} \mid D_1$ décomposé dans $k(\xi_p)$, alors

$$E_{D_1,1}(O) = \prod_{\mathfrak{p} \mid D_1} \left(1 - \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right) = 0$$

et $\zeta_k(-1)\, 2^{2-n}$ est entier en p. Si $\mathfrak{p}_o \mid p$ est décomposé dans $k(\xi_p)$, il est toujours possible de choisir D_1 divisible par $\mathfrak{p}_o$, en tenant compte de la parité de n, sauf si n est pair et si $\mathfrak{p}_o$ est l'unique idéal premier de k au-dessus de p. Dans ce cas, en choisissant $D_1 = (1)$ nous allons montrer que la contribution de la somme qui détermine la p-partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)$

$$\sum_{\xi_p \in O} E_{D_1,1}(O) \frac{h'(O)}{w(O)}$$

est entière. Les ordres O contenant ξ_p sont les ordres de conducteur $1, \mathfrak{p}_o, \ldots, \mathfrak{p}_o^m$ où $\mathfrak{p}_o^m$ est le conducteur de l'ordre $R[1, \xi_p]$ dans l'ordre maximal de $k(\xi_p)$. Si $p^{n(p)}$ est la plus grande puissance de p divisant w_p, on a $m \geqslant p^{n(p)-1}$. D'autre part si O est un ordre de conducteur $\mathfrak{p}_o^r$, on a

$$\frac{h'(O)}{w(O)} = \frac{h'_p}{w_p} N\, \mathfrak{p}_o^r \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}_o}\right).$$

Pour tous les ordres O,

$$E_{1,1}(O) = 1$$

d'où

$$\sum_{\xi_p \in O} E_{1,1}(O) \frac{h'(O)}{w(O)} = \frac{h'_p}{w_p}\left[1 + \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}_o}\right)\left(N\,\mathfrak{p}_o + \ldots N\,\mathfrak{p}_o^m\right)\right]$$

$$= \frac{h'_p}{w_p} N\, \mathfrak{p}_o^m .$$

Il est clair puisque $m \geqslant p^{n(p)-1}$ que cette somme est entière en p.

Dans les autres cas, nous cherchons la p-partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)$. Si le nombre d'idéaux premiers de k divisant p a même parité que le degré n, on choisit $D_1 = \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{p}$. Ce choix a l'avantage de réduire la somme $\sum_{\xi_p \in O}$ à l'unique terme correspondant à l'ordre maximal de $k(\xi_p)$, tout ordre non maximal O contenant ξ_p ayant un conducteur non premier à D_1, on a

$$E_{D_1,1}(O) = \prod_{\mathfrak{p}|D_1} \left(1 - \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right) = 0 \qquad \text{si } O \text{ n'est pas maximal,}$$

$$E_{D_1,1}(O) = 2^{s_p} \qquad \text{si } O \text{ est maximal,}$$

où s_p est le nombre d'idéaux premiers au-dessus de p qui sont inertes dans $k(\xi_p)$. La p-partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)\, 2^{2-n}$ est donc celle de

$$\frac{1}{\prod_{\mathfrak{p}|p} (1 - N\mathfrak{p})} \; \frac{2^{s_p} h'_p}{w_p}$$

Si la parité de n ne nous permet pas de choisir $D_1 = \prod_{\mathfrak{p}|p} p$ nous isolons $\mathfrak{p}_o \,|\, p$ et nous prenons $D_1 = \prod_{\substack{\mathfrak{p}|p \\ \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_o}} \mathfrak{p}$. Ce choix a l'avantage de réduire la somme $\sum_{\xi_p \in O}$ aux ordres contenant ξ_p dont le conducteur est une puissance de $\mathfrak{p}_o$. Si $\mathfrak{p}_o^m$ est la plus grande puissance de $\mathfrak{p}_o$ divisant le conducteur de l'ordre $R[1, \xi_p]$, la somme $\sum_{\xi_p \in O}$ est effectuée sur les ordres de conducteur $1, \mathfrak{p}_o \dots \mathfrak{p}_o^m$.

On a

$$E_{D_1,1}(O) = 2^{s'_p}$$

où $s'_p = s_p - \varepsilon$, avec:

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathfrak{p}_o \text{ est inerte dans } k(\xi_p) \\ 0 \text{ si } \mathfrak{p}_o \text{ est ramifié dans } k(\xi_p). \end{cases}$$

On a

$$\sum_{\xi_p \in O} E_{D_1,1}(O) \frac{h'(O)}{w(O)} = \frac{h'_p\, 2^{s'_p}}{w_p} \left[1 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{N\mathfrak{p}_o}\right)(N\mathfrak{p}_o + \dots N\mathfrak{p}_o^m)\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{h'_p\, 2^{s'_p}}{w_p(1 - N\mathfrak{p}_o)}(1 - N\mathfrak{p}_o^{m+1}) \text{ si } \varepsilon = 0 \\[2ex] \dfrac{h'_p\, 2^{s'_p}}{w_p(1 - N\mathfrak{p}_o)}(+2 - N\mathfrak{p}_o^m - N\mathfrak{p}_o^{m+1}) \text{ si } \varepsilon = 1\,. \end{cases}$$

Dans les 2 cas la p-partie fractionnaire de $\sum_{\xi_p \in O} E_{D_1,1}(O) \frac{h'(O)}{w(O)}$ est celle de $\frac{h'_p 2^{s_p}}{w_p(1-N\mathfrak{p}_o)}$ donc $\frac{1}{\Phi(D_1, 1)} \sum_{\xi_p \in O} E_{D_1,1}(O) \frac{h'(O)}{w(O)}$ a comme p-partie fractionnaire celle de

$$\frac{h'_p 2^{s_p}}{w_p \prod_{\mathfrak{p}|p} (1-N\mathfrak{p})}.$$

Deuxième cas : $p = 2$. Contrairement au cas où p est impair, la somme

$$S = \sum_{\xi_p \in O} E_{D_1, D_2}(O) \frac{h'(O)}{w(O)}$$

n'est pas 2-entière, mais

$$w(O) = [O^* : R_k^*] = [O^* : W(O) R_k^*][W(O) R_k^* : R_k^*]$$

$$w(O) = \omega(O) \frac{Q(O)}{2}$$

où $\omega(O)$, $Q(O)$ désignent l'ordre du groupe des racines de l'unité contenues dans O et où $Q(O)$ est l'indice des unités de O (I.5). On a $Q(O) = 1$ ou 2 et $\omega(O) \not\equiv 0 \pmod 4$ si $\xi_2 \notin 0$, donc $2/w(O)$ est 2-entier. Nous obtenons que la 2-partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)\, 2^{3-n}$ est celle de

$$\frac{2}{\Phi(D_1, 1)} \sum_{\xi_2 \in O} E_{D_1,1}(O) \frac{h'(O)}{w(O)}.$$

Les calculs se poursuivent alors de façon analogue au cas p impair.

Si toute unité totalement positive de k est un carré, la somme S est 2-entière, et on obtient en fait la 2-partie fractionnaire de $\xi_k(-1)\, 2^{2-n}$.

2. *Corps cyclotomique*

Nous supposons que k est le sous-corps réel maximal d'un corps cyclotomique. La structure arithmétique de ces corps étant mieux connue, nous pouvons améliorer le théorème général.

Si k est le sous-corps réel maximal du 2^m-ième corps cyclotomique, $m > 2$, toute unité totalement positive étant un carré (théorème de Weber) et le nombre de classes relatif h'_2 étant impair, *la 2-partie fractionnaire de* $\zeta_k(-1)\, 2^{2-n}$ *est celle de* $-h'_2\, 2^{1-m}$ *et l'exposant de* 2 *dans* $\zeta_k(-1)$ *est*

$n - m - 1 = 2^{m-2} - m - 1$. On peut retrouver ce résultat à l'aide des nombres de Bernoulli [6]. On montre que pour $m \geqslant 5$, $\zeta_k(-1)$ est entier en 3, donc le nombre de classes relatif de $\mathbf{Q}(\xi_{2m}, \xi_3)$ est divisible par 3.

Si k est le sous-corps réel maximal du p^m-ème corps cyclotomique (p premier impair), l'indice des unités de $k = \mathbf{Q}(\xi_{p^m} + \xi_{p^m}^{-1})$ dans $\mathbf{Q}(\xi_{p^m})$ est égal à p^m (théorème de Hasse: $Q = 1$) donc *la p-partie fractionnaire de* $\zeta_k(-1)\,2^{2-n}$ *est celle de*

$$\frac{h'_p}{p^m(1-p)}.$$

Si p est un nombre premier regulier, on sait que h'_p est premier à p (théorème d'Iwasawa), donc l'exposant de p dans $\zeta_k(-1)$ est $-m$.

Si k est le sous-corps réel maximal de N-ème corps cyclotomique où N est un nombre composé, l'indice des unités de $k = \mathbf{Q}(\xi_N + \xi_N^{-1})$ dans $\mathbf{Q}(\xi_N)$ est égal à N ou $2N$ selon que N est pair ou impair (théorème de Hasse, $Q = 2$). On obtient des résultats explicites analogues.

3. *Corps quadratique*

Nous donnerons dans le chapitre 3 le calcul de l'expression:

$$\sum_{O} \frac{w(O) - 1}{2\,w(O)} E_{D_1,D_2}(O)\, h(O)$$

de la proposition 1.3 pour les corps quadratiques réels et nous obtiendrons une formule du nombre de classes d'idéaux

$$H_{D_1,D_2} = \frac{h_k \zeta_k(-1)\, \Phi_k(D_1, D_2)}{2} + \sum_{O} \frac{w(O) - 1}{2\,w(O)} E_{D_1,D_2}(O)\, h(O)$$

dont nous déduirons la partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)/2$ en écrivant que $H_{1,1}/h_k$ est un entier. Nous obtiendrons les résultats suivants:

Proposition 2.2. *Soit* $k = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ *un corps quadratique réel et* $\zeta_m(-1)$ *la valeur au point* -1 *de sa fonction zêta. On note* $h(d)$ *le nombre de classes d'idéaux du corps* $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$. *On a*

$$\frac{\zeta_m(-1)}{2} + \alpha(m)\frac{h(-m)}{8} + \beta(m)\frac{h(-3m)}{6} + \gamma(m)\frac{h(n)\,h(n')}{4} \in \mathbf{Z}$$

avec

$$
\alpha(m) = \begin{cases}
\left.\begin{array}{rlrl} -3 & m & \equiv & -2\,(4) \\ 2 & m & \equiv & 3\,(8) \\ 0 & m & \equiv & -1\,(8) \end{array}\right\} & \textit{si } Q_2 = 2 \\[2ex]
\left.\begin{array}{rlrl} 1 & m & \equiv & 1\,(4) \\ 3 & m & \equiv & 2\,(4) \\ 2 & m & \equiv & 3\,(8) \\ 4 & m & \equiv & -1\,(8) \end{array}\right\} & \text{si } Q_2 = 1
\end{cases}
$$

$$
(22) \qquad \beta(m) \begin{cases}
\begin{array}{rlrlrlrl}
-1 & m' & \equiv & -1\,(3) & m & \equiv & -1, 2\,(4) & \\
0 & m' & \equiv & -1\,(3) & m & \equiv & 1\,(4) & \\
1 & m' & \equiv & 1\,(3) & m & \equiv & 1\,(8) & \\
2 & m' & \equiv & 1\,(3) & m & \equiv & 5\,(8) & \\
3 & m' & \equiv & -1\,(3) & m & \equiv & 1, 2\,(8) & \\[2ex]
1 & m & \not\equiv & 0\,(3) & & & & \\
3 & m & = & 3\,m' & m' & \equiv & -1\,(3) & \text{si } Q_3 = 1 \\
5 & m & = & 3\,m' & m' & \equiv & -1, 2\,(4) &
\end{array}
\end{cases}
$$

$$
\gamma(m) = \begin{cases}
0 & n \equiv 1\,(8) \quad \textit{ou } n \equiv n' \equiv 5\,(8) \\
1 & n \equiv n' \not\equiv 1\,(4) \\
2 & n \equiv 5\,(8) \quad \textit{mais } n \not\equiv 1, 5\,(8) \\
3 & n \equiv -1\,(4) \quad n' \equiv 2\,(4)
\end{cases}
$$

où Q_2 *et* Q_3 *désignent l'indice des unités de* $Q(\sqrt{-m}, \sqrt{-1})$ *et* $\mathbf{Q}(\sqrt{-3m}, \sqrt{-3})$, *où* γ (m) *est défini lorsque* $\varepsilon \gg 0$ *et alors* $n = 2 - \mathrm{Tr}\,\varepsilon$ *(modulo les carrés) et* $nn' = m$ *ou* $4m$.

Cas particulier: $m = p$ est un nombre premier. La formule précédente, dans ce cas particulier, est

$$
p \equiv 1\,(4) \qquad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h(-3p)}{6} + \frac{h(-p)}{8} \in \mathbf{Z}
$$

$$
p \equiv 3\,(8) \qquad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h(-3p)}{6} + \frac{h(-p)}{4} + \frac{h(-2p)}{4} \in \mathbf{Z}
$$

$$
p \equiv -1\,(8) \qquad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h(-3p)}{6} + \frac{h(-2p)}{4} \in \mathbf{Z}
$$

Les congruences suivantes sont bien connues:

$$p \equiv \quad 3\,(8) \qquad h\,(-2p) \equiv 2\,(4) \quad \text{donc} \quad \frac{h\,(-2p)}{4} - \frac{h\,(-p)}{2} \in \mathbf{Z}$$

$$p \equiv -1\,(8) \qquad h\,(-2p) \equiv 0\,(4) \quad \text{donc} \quad \frac{h\,(-2p)}{4} \in \mathbf{Z}$$

et nous obtenons:

Corollaire 2.1. *Soit p un nombre premier. Les quantités suivantes sont des entiers :*

$$p \equiv \quad 1\,(4) \qquad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h\,(-3p)}{6} + \frac{h\,(-p)}{8}$$

$$(23) \quad p \equiv \quad 3\,(8) \qquad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h\,(-3p)}{6} + \frac{3}{4}\,h\,(-p)$$

$$p \equiv -1\,(8) \qquad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h\,(-3p)}{6}$$

Ces nombres représentent la caractéristique d'Euler-Poincaré du groupe modulaire de $k = \mathbf{Q}\,(\sqrt{p})$ calculée par Hirzebruch [8].

Chapitre 3. Nombre de classes d'un ordre d'Eichler sur un corps quadratique

On explicite la formule (16) du nombre de classes d'idéaux d'un ordre d'Eichler sur un corps quadratique.

Soit m un entier positif et $k = \mathbf{Q}\,(\sqrt{m})$; on note respectivement R_m, $h\,(m)$, $\zeta_m\,(-1)$, $N_m\,(.)$, l'anneau des entiers, le nombre de classes, la valeur au point -1 de la fonction zêta, la norme absolue du corps $\mathbf{Q}\,(\sqrt{m})$; soit D_1 un produit d'un nombre pair d'idéaux premiers distincts de $\mathbf{Q}\,(\sqrt{m})$ et soit D_2 un autre produit d'idéaux premiers distincts de $\mathbf{Q}\,(\sqrt{m})$, premier à D_1. Le nombre de classes des ordres d'Eichler sur $\mathbf{Q}\,(\sqrt{m})$ d'invariant (D_1, D_2) est égal à

$$H = H_m(D_1, D_2) = \frac{h\,(m)\,\Phi_m(-1)\,\zeta_m(D_1, D_2)}{2} +$$

$$\sum_{O} \frac{w(O)-1}{2\,w(O)}\, E_{D_1,D_2}(O)\, h(O) \tag{24}$$

où on a posé

$$\Phi_m(D_1, D_2) = \prod_{\mathfrak{p} \mid D_1} (N\mathfrak{p} - 1) \prod_{\mathfrak{p} \mid D_2} (N\mathfrak{p} + 1)\,;$$

la sommation porte sur les ordres O des extensions quadratiques totalement imaginaires de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ telles que l'indice $w(O) = [O^* : R_m^*]$ soit supérieur à 1. Si $m \neq 2, 3, 5$ l'ordre O est contenu dans $k_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-1})$, $k_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$ ou $k_\varepsilon = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-\varepsilon})$ si l'unité fondamentale ε est totalement positive, c'est-à-dire de norme $+1$; les corps k_3 et k_ε sont confondus si l'indice des unités Q_3 de k_3 est égal à 2. Nous posons $i = \sqrt{-1}$, $\rho = \dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ et nous notons Q_2 l'indice des unités de k_2.

Nous rappelons d'abord quelques résultats sur l'indice des unités et sur le nombre de classes des corps biquadratiques imaginaires qui sont démontrés par H. Hasse [7].

1. *Corps biquadratiques*

PROPOSITION 3.1. *Si l'unité fondamentale ε de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ est totalement positive, le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-\varepsilon})$ est un corps biquadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-n})$ où $n = \mathrm{Tr}\,\varepsilon - 2$ modulo les carrés. Le nombre de classes h_ε de $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-n})$ est*

$$h\varepsilon = h(m)\, h(-n)\, h(-n') \tag{25}$$

où $nn' = m$ ou $4m$.

PROPOSITION 3.2. *Les corps biquadratiques imaginaires suivants ont un indice d'unités égal à 2 :*

$\mathbf{Q}(\sqrt{-q_1}, \sqrt{-q_2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-q})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-2q})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-q})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-2q})$.

où les nombres q, q_1, q_2 sont premiers et congrus à 3 modulo 4.

PROPOSITION 3.3. *Le nombre de classes de* $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-1})$ *est*

$$h_2 = \frac{Q_2}{2} h(m) h(-m) . \tag{26}$$

Pour que Q_2 soit égal à 2, il faut et il suffit qu'il existe une unité η vérifiant $\eta^2 = \sqrt{-1}\,\varepsilon$. Alors le conducteur de l'ordre $R_m(1, \eta)$ est

$$f_\eta = 1 \quad \text{si } m \equiv 2(4)$$
$$f_\eta = \mathfrak{p}_2 \quad \text{si } m \equiv -1(4)$$

On note $\mathfrak{p}_q$ un idéal premier de $(\mathbf{Q}\sqrt{m})$ au-dessus de q.

Si $m \equiv 1$ (4) l'indice des unités Q_2 est égal à 1. Le discriminant relatif d_2 de $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-1})$ sur $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ est

$$d_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } m \equiv -1(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv 2(4) \\ 4 & \text{si } m \equiv 1(4) \end{cases}$$

Le conducteur de l'ordre $R_m(1, \sqrt{-1})$ est

$$f_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } m \equiv 1(4) \\ \mathfrak{p}_2 & \text{si } m \equiv 2(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv -1(4) \end{cases} \tag{27}$$

PROPOSITION 3.4. *Le nombre de classes de* $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$ *est*

$$h_3 = \frac{Q_3}{2} h(m) h(-3m) . \tag{28}$$

Pour que Q_3 soit égal à 2, il faut et il suffit que $\sqrt{-\varepsilon}$ appartienne à $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$, Il est nécessaire que $m \equiv 0$ (3); le conducteur de l'ordre $R_m(1, \sqrt{-\varepsilon})$ est

$$f_\varepsilon = 2 \tag{29}$$

Le discriminant relatif d_3 de $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$ sur $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ est

$$d_3 = \begin{cases} 3 & \text{si } m \not\equiv 0(3) \\ 1 & \text{si } m \equiv 0(3) \end{cases}$$

Le conducteur de l'ordre $R_m(1, \rho)$ est

(30) $$f_3 = \begin{cases} 1 & \text{si } m \not\equiv 0(3) \\ \mathfrak{p}_3 & \text{si } m \equiv 0(3) \end{cases}$$

Nous supposons que $m \neq 2, 3, 5$. Nous calculons la somme $\sum_O$ de la relation (16) en la décomposant en 2 ou 3 parties suivant le cas:

(31) $$\sum_O = \sum_{O \subset k_2} + \sum_{O \subset k_3} + \sum_{O \subset k_\varepsilon}$$

le troisième terme de la somme pouvant disparaître éventuellement. Nous notons respectivement S_2, S_3, S_ε ces trois sommes.

2. *Calcul de* S_2

Par définition, on a

$$E_{D_1, D_2}(O) = \prod_{\mathfrak{p} \mid D_1} \left(1 - \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right) \prod_{\mathfrak{p} \mid D_2} \left(1 + \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right)$$

Ce nombre dépend de m, D_1, D_2, du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, O)$ et des idéaux premiers divisant le conducteur $f = f(O)$ de l'ordre O dans ce corps. Nous le noterons

$$E^{(i)}_{D_1, D_2}(f)$$

l'indice i étant égal à 2, 3 ou ε.

a) *L'indice des unités* Q_2 *est égal à* 1.

Nous avons

$$S_2 = \sum_{O \subset k_2} \frac{w(O) - 1}{2\, w(O)} h(O) E_{D_1, D_2}(O) = \frac{1}{4} \sum_{i \in O} h(O) E_{D_1, D_2}(O)$$

Nous avons caclulé dans le paragraphe précédent le conducteur de l'ordre $R_m(1, i)$ et nous avons donné dans le premier chapitre la formule du nombre de classes $h(0)$ qui s'écrit avec nos hypothèses

$$h(O) = \frac{h(m)\, h(-m)}{2} N f(O) \prod_{\mathfrak{p} \mid f(O)} \left(1 - \frac{\left(\frac{k_2}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

Si $m \equiv 1$ (4), l'ordre $R_m(1, i)$ est maximal donc on a:

(32) $$S_2 = \frac{h(m)\, h(-m)}{8} E^{(2)}_{D_1, D_2}(1)$$

Si $m \equiv 2$ (4), l'ordre $R_m(1, i)$ a pour conducteur l'idéal premier $\mathfrak{p}_2$ qui est ramifié dans k_2; il a pour nombre de classes $h(m)\,h(-m)$ et on a:

$$(33) \qquad S_2 \equiv \frac{h(m)\,h(-m)}{8}\left[E^{(2)}_{D_1,D_2}(1) + 2\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(2)\right]$$

Si $m \equiv -1$ (8), l'idéal premier $\mathfrak{p}_2$ est décomposé dans k_2, l'ordre $R_m(1, i)$ a pour conducteur 2 et pour nombre de classes $h(m)\,h(-m)$, l'ordre de conducteur $\mathfrak{p}_2$ a pour nombre de classes $\dfrac{h(m)\,h(-m).}{2}$ On a:

$$(34) \qquad S_2 = \frac{h(m)\,h(-m)}{8}\left[E^{(2)}_{D_1,D_2}(1) + 3\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(2)\right]$$

Si $m \equiv 3$ (8), l'idéal premier $\mathfrak{p}_2$ est inerte dans k_2; les ordres de conducteur 2 et $\mathfrak{p}_2$ ont pour nombre de classes $3\,h(m)\,h(-m)$ et $\dfrac{3}{2}\,h(m)\,h(-m)$ respectivement. On a

$$(35) \qquad S_2 = \frac{h(m)\,h(-m)}{8}\left[E^{(2)}_{D_1,D_2}(1) + 9\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(2)\right]$$

b) *L'indice des unités Q_2 est égal à* 2.

Comme $i \in R_m(1, \eta)$ nous avons:

$$S_2 = \sum_{O \subset k_2} \frac{w(O) - 1}{2\,w(O)}\,h(O)\,E_{D_1,D_2}(O) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in O \\ \eta \notin O}} \frac{h(O)}{w(O)}\,E_{D_1,D_2}(O) + \frac{3}{2} \sum_{\eta \in O} \frac{h(O)}{w(O)}\,E_{D_1,D_2}(O)\,.$$

On a

$$\frac{h(O)}{w(O)} = \frac{h(m)\,h(-m)}{4}\,N f(O) \prod_{\mathfrak{p} | f(O)} \left(1 - \frac{\left(\frac{k_2}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

Nous obtenons facilement les formules suivantes:

Si $m \equiv 2$ (4)

$$(36) \qquad S_2 = \frac{h(m)\,h(-m)}{8}\left[3\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(1) + 2\,E_{D_1,D_2}(2)\right]$$

Si $m \equiv -1$ (8)

(37) $$S_2 = \frac{h(m)\,h(-m)}{8}\left[3\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(1) + 5\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(2)\right]$$

Si $m \equiv 3$ (8)

(38) $$S_2 = \frac{h(m)\,h(-m)}{8}\left[3\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(1) + 15\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(2)\right]$$

3. *Calcul de* S_3

a) *L'indice des unités* Q_3 *est égal à* 1.

Si O est un ordre contenu dans k_3, il vérifie:

$$\frac{h(O)}{w(O)} = \frac{h(m)\,h(-3m)}{6}\,N\,f\,(O)\prod_{\mathfrak{p}\mid f(O)}\left(1 - \frac{\left(\frac{k_3}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

Nous avons

$$S_3 = \sum_{O\subset k_3}\frac{h(O)}{w(O)}\,E_{D_1,D_2}(O)$$

Si $m \not\equiv 0$ (3), l'ordre $R_m(1, \rho)$ est maximal donc on a:

(39) $$S_3 = \frac{h(m)\,h(-3m)}{6}\,E^{(3)}_{D_1,\,D_2}(1)$$

Si $m \equiv 6$ (9), l'ordre $R_m(1, \rho)$ a pour conducteur l'idéal $\mathfrak{p}_3$ qui est décomposé dans k_3. On a

(40) $$S_3 = \frac{h(m)\,h(-3m)}{6}\left[E^{(3)}_{D_1,D_2}(1) + 2\,E^{(3)}_{D_1,D_2}(3)\right]$$

Si $m \equiv 3$ (9), l'ordre $R_m(1, \rho)$ a pour conducteur l'idéal $\mathfrak{p}_3$ qui est inerte dans k_3. On a

(41) $$S_3 = \frac{h(m)\,h(-3m)}{6}\left[E^{(3)}_{D_1,D_2}(1) + 4\,E^{(3)}_{D_1,D_2}(3)\right]$$

b) *L'indice des unités* Q_3 *est égal à* 2.

C'est le cas où $k_3 = k_\varepsilon$. Les ordres $R_m(1, \rho)$ et $R_m(1, \sqrt{-\varepsilon})$ ont pour conducteur $\mathfrak{p}_3$ et 2.

La somme sur les ordres $O \subset k_3$ s'écrit

$$S_3 = \frac{5}{2} \sum_{\substack{\rho\in O \\ \sqrt{-\varepsilon}\in O}} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1,D_2}(O) + \sum_{\substack{\rho\in O \\ \sqrt{-\varepsilon}\notin O}} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1,D_2}(O)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{\sqrt{-\varepsilon}\in O \\ \eta\notin O}} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1,D_2}(O)$$

On peut écrire cette formule sous la forme suivante:

$$S_3 = \frac{h(m)\,h(-3m)}{12} \left[5\, E^{(3)}_{D_1,\,D_2}(1) + 2\,b\, E^{(3)}_{D_1,\,D_2}(3) + c\, E^{(3)}_{D_1,\,D_2}(2)\right] \tag{42}$$

où

$$b = N\mathfrak{p}_3 \left(1 - \frac{\left(\frac{k_3}{\mathfrak{p}_3}\right)}{N\mathfrak{p}_3}\right) \quad \text{et} \quad c = \sum_{\substack{f\mid 2 \\ f\neq 1}} N f \prod_{\mathfrak{p}\mid f} \left(1 - \frac{\left(\frac{k_3}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

On calcule facilement b et c. On a

$$b = \begin{cases} 4 \text{ si } m \equiv 3\,(9) \\ 2 \text{ si } m \equiv 6\,(9) \end{cases} \tag{43}$$

$$c = \begin{cases} 9 \text{ si } m \not\equiv 1\,(4) \\ 15 \text{ si } m \equiv 1\,(8) \\ 3 \text{ si } m \equiv 5\,(8) \end{cases}$$

4. *Calcul de S_ε*

Si $k_\varepsilon \neq k_3$ il nous reste à calculer un terme pour avoir la valeur H du nombre de classes. On a

$$S_\varepsilon = \sum_{\sqrt{-\varepsilon}\in O} \frac{w(O) - 1}{2\,w(O)} h(O)\, E_{D_1,D_2}(O) = \frac{h(m)\,h(-n)\,h(-n')}{4} c(m)$$

où $c\,(m)$ est un entier que l'on déterminera dans chaque cas. Il est défini par la formule suivante:

$$c(m) = E^{(\varepsilon)}_{D_1,\,D_2}(1) + \sum_{\substack{f\mid f_3 \\ f\neq 1}} E^{(\varepsilon)}_{D_1,\,D_2}(f)\, N f \prod_{\mathfrak{p}\mid f} \left(1 - \frac{\left(\frac{k_\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right) \tag{44}$$

5. *Cas particuliers :* $m = 2, 3, 5$.

Il nous reste à examiner ces trois cas. Si $m = 2$, la norme de l'unité fondamentale étant -1, les indices d'unités sont égaux à 1; il n'existe pas de somme S_ε, la somme S_3 est donnée par la formule (39), la somme S_2 est exceptionelle car $k_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})$ contient une unité d'ordre 8. On a:

$$S_2 = \frac{3}{8} E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + \frac{1}{4} E^{(2)}_{D_1, D_2}(2) \tag{45}$$

Si $m = 3$, l'unité fondamentale ε est totalement positive et égale à $\varepsilon = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$. Le corps k_ε est $\mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-2})$; l'ordre $R_3(1, \sqrt{-\varepsilon})$ est maximal, donc on a:

$$S_\varepsilon = \frac{h(3)\, h(-2)\, h(-6)}{4} E^{(\varepsilon)}_{D_1, D_2}(1) = \frac{1}{2} E^{(\varepsilon)}_{D_1, D_2}(1) \tag{46}$$

Les sommes S_2 et S_3 sont exceptionelles car $k_2 = k_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-1}) = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-3})$. Les ordres O contenus dans k_2 tels que $w(O) \neq 0$ sont donnés dans le tableau suivant:

$f(O)$	1	$\mathfrak{p}_2$	2	$\mathfrak{p}_3$
$w(O)$	12	4	2	3
$h(O)$	1	1	1	1

Nous en déduisons facilement la valeur de S_2:

$$S_2 = \frac{11}{24} E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + \frac{5}{8} E^{(2)}_{D_1, D_2}(2) + \frac{1}{3} E^{(2)}_{D_1, D_2}(3) \tag{47}$$

Si $m = 5$, la norme de l'unité fondamentale est -1 et les sommes S_2, S_3 sont données par les formules (32), (39). Mais $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ est le sous-corps réel maximal du 5-ème corps cyclotomique k_5 et la formule (31) doit être remplacée par:

$$\sum_{O} = \sum_{O \subset k_2} + \sum_{O \subset k_3} + \sum_{O \subset k_5} \tag{48}$$

Il est facile de calculer la somme S_5 ainsi introduite:

$$S_5 = \frac{2}{5} E^{(5)}_{D_1, D_2}(1) \tag{49}$$

6. *Théorèmes*

Tous les calculs de ce chapitre ont été effectués pour obtenir les résultats suivants:

THÉORÈME 3.1. *Le nombre de classes d'un ordre d'Eichler d'invariant* (D_1, D_2) *sur un corps quadratique* $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$, *où* m *est un entier positif sans facteur carré et différent de* 2, 3. 5, *est égal à*

$$\begin{aligned} H_m(D_1, D_2) = h(m) \Bigg[& \frac{\zeta_m(-1)\, \Phi_m(D_1, D_2)}{2} + \frac{h(-m)}{8} a(m) \\ & + \frac{h(-3m)}{12} b(m) + \frac{h(-n)\, h(-n')}{4} c(m) \Bigg], \end{aligned} \tag{50}$$

où les nombres entiers $a(m)$, $b(m)$, $c(m)$ *sont déterminés par les relations*

$$S_2 = \frac{h(m)\, h(-m)}{8} a(m)$$

$$S_3 = \frac{h(m)\, h(-3m)}{12} b(m)$$

$$S_\varepsilon = \frac{h(m)\, h(-n)\, h(-n')}{4} c(m)$$

THÉOREME 3.2. *Le nombre de classes des ordres d'Eichler d'invariant* (D_1, D_2) *sur les corps* $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ *est respectivement égal à*

$$\text{(51)}\quad H_2(D_1, D_2) = \frac{\Phi_2(D_1, D_2)}{24} + \frac{3 E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 2 E^{(2)}_{D_1, D_2}(2)}{8} + \frac{E^{(3)}_{D_1, D_2}(1)}{3}$$

$$H_3(D_1, D_2) = \frac{\Phi_3(D_1, D_2)}{12} + \frac{11\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 15\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(2) + 8\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(3)}{24} + \frac{E^{(\varepsilon)}_{D_1, D_2}(1)}{2}$$

$$H_5(D_1, D_2) = \frac{\Phi_5(D_1, D_2)}{30} + \frac{E^{(2)}_{D_1, D_2}(1)}{4} + \frac{E^{(3)}_{D_1, D_2}(1)}{3} + \frac{2\, E^{(5)}_{D_1, D_2}(1)}{5} .$$

Appendice:

Calcul des nombres de classes des ordres d'Eichler sur le corps des nombres rationnels

Nous avons calculé sur ordinateur les nombres H_{D_1,D_2}, T_{D_1,D_2}, $H^+_{D_1,D_2}$ pour les ordres d'Eichler d'invariant (D_1, D_2) sur le corps des nombres rationnels. Nous avons utilisé les résultats théoriques du chapitre 1.

D_1 désigne un produit d'un nombre impair de nombres premiers sans facteur carré,

D_2 désigne un produit de nombres premier sans facteur carré tel que $(D_1, D_2) = 1$.

s est le nombre de diviseurs premiers de $D_1\, D_2$.

$h(-m)$ est le nombre de classes du corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, $d(-m)$ est son discriminant:

$$d(-m) = \begin{cases} -m & \text{si } m \equiv -1\,(4) \\ -4m & \text{si } m \not\equiv -1\,(4) . \end{cases}$$

$E^{(m)}_{D_1, D_2} = \prod_{p \mid D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{p \mid D_2} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$ est le symbole $E_{D_1,D_2}(O)$ correspondant à l'ordre maximal O de $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$.

$F^{(m)}_{D_1, D_2} = 2 \prod_{p \mid D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{\substack{p \mid D_2 \\ p \neq 2}} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$ est le symbole correspondant à l'ordre de conducteur 2 de $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ si D_2 est pair et $m \equiv 3\ (8)$.

On pose

$$\lambda(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \not\equiv -1\,(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv 7\,(8) \text{ ou si } m = 3 \\ 4 & \text{si } m \equiv 3\,(8) \text{ et } m \neq 3 , \end{cases}$$

$$\kappa(m) = \begin{cases} \lambda(m) & \text{si } m \not\equiv 3(8) \quad ou \text{ si } m = 3 \\ 3 & \text{si } m \equiv 3(8) \quad et \quad m \neq 3. \end{cases}$$

On calcule facilement les nombres $p(m)$ pour $m \mid D_1 D_2$. On a

$$p(1) = \frac{1}{12}\left[\prod_{p \mid D_1} (p-1) \prod_{p \mid D_2} (p+1) + 3\, E^{(1)}_{D_1, D_2} + 4\, E^{(3)}_{D_1, D_2}\right],$$

$$2\, p(m) = \begin{cases} E^{(m)}_{D_1, D_2}\, h(-m) & \text{si } D_1 \text{ est pair} \\ E^{(m)}_{D_1, D_2}\, h(-m)\, \lambda(m) & \text{si } D_1 D_2 \text{ est impair} \\ F^{(m)}_{D_1, D_2}\, h(-m)\, \kappa(m) & \text{si } D_2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

Nous obtenons les nombres H_{D_1,D_2}, T_{D_1,D_2}, $H^{+}{}_{D_1,D_2}$ en utilisant les formules (12) qui s'écrivent:

$$\begin{aligned} H_{D_1,D_2} &= p(1) \\ 2^s\, T_{D_1, D_2} &= \sum_{m \mid D_1 D_2} p(m) \\ 2^s\, H^{+}{}_{D_1,D_2} &= \sum_{m \mid D_1 D_2} (p(m))^2 \end{aligned}$$

Les tables de Pizer [9] donnent H_{D_1,D_2} et T_{D_1,D_2} pour $D_1 D_2 \leqslant 210$. Elles contiennent quelques erreurs

D_1	D_2		
5	23	$H = 8$	au lieu de 10
7	26	$T = 5$	au lieu de 6
17	10	$T = 5$	au lieu de 6
19	10	$T = 6$	au lieu de 7
3	70	$T = 3$	au lieu de 4

Si $k = \mathbf{Q}(\sqrt{10})$, $D_1 = 1$, $D_2 = 7$ on trouve $H_{1,7} = 64$ au lieu de 61 et $T_{1,7} = 18$ au lieu de 30. Si on calcule $H^{+}_{1,7}$ on a $H^{+}_{1,7} = 1040$.

Nous possédons les nombres de classes des idéaux à gauche H_{D_1,D_2}, le nombre de type d'ordres T_{D_1,D_2} et le nombre de classes des idéaux quasi-normaux $H^{+}_{D_1,D_2}$ pour les invariants (D_1, D_2), $D_1 < 47$ et $D_2 \leqslant 101$, $47 \leqslant D_1 \leqslant 101$ et $D_2 \leqslant 31$.

Mes remerciements chaleureux vont à H. Cohen qui a programmé ces opérations sur l'ordinateur du centre de calcul de Bordeaux.

Nous avons extrait des tables obtenues les ordres d'Eichler pour lesquels les nombres H_{D_1,D_2}, T_{D_1,D_2}, $H^{+}_{D_1,D_2}$ sont égaux à 1.

1. *Ordres tels que* $H^{+}_{D_1,D_2} = 1$

Il y en a 10 (à isomorphisme près)

D_1	D_2
2	1
	3
	5
	11
3	1
	2

D_1	D_2
5	1
	2
7	1
13	1

2. *Ordres tels que* $H_{D_1,D_2} = 1$

Ce sont les mêmes

3. *Ordres tels que* $T_{D_1,D_2} = 1$

Il faut rajouter les 10 invariants suivants:

D_1	D_2
2	7
	15
	23
3	5
	11

D_1	D_2
7	3
30	1
42	1
70	1
78	1

Pour tous ces ordres, nous avons $H_{D_1,D_2} = H^{+}_{D_1,D_2} = 1$.

Pour les autres ordres, les relations suivantes sont toujours vérifiées:

$$1 < T_{D_1,D_2} < H_{D_1,D_2} \leqslant H^{+}_{D_1,D_2} \leqslant T_{D_1,D_2} H_{D_1,D_2} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROWN, K. S. Euler characteristics of discrete groups and G-spaces. *Invent. Math. (à paraître)*.

[2] DEDEKIND, K. Über die Anzahl der Ideal-Klassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlicher Körpers. *Gesammelte mathematische werke I.*

[3] DEURING, M. *Algebren.* Springer Verlag.

[4] EICHLER, M. Zur Zahlentheorie der Quaternionen algebren. *J. reine angew. math. 195* (1955), pp. 127-151.

[5] GREENBERG, R. A generalisation of Kummer's criterion. *Invent. Math. 21* (1974), pp. 247-254.

[6] GUEHO, M. F. *Corps de quaternions et fonction zêta au point-1.* Thèse de 3e cycle (1972) Bordeaux.

[7] HASSE, H. *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper.* Akademie Verlag Berlin, 1952.

[8] HIRZEBRUCH, F. Hilbert modular surfaces. *L'Enseignement mathématique 19* (1973), pp. 183-283.

[9] PIZER, A. K. Type number of Eichler orders. *J. reine angew math. 264*, pp. 67-102.

[10] —— Class number of positive definite quaternary quadratic forms *(à paraître)*.

[11] VIGNERAS-GUEHO, M. F. Partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)$. *C. R. Acad. Sc. Paris, 279*, nº 10 (1974), pp. 359.

(Reçu le 18 décembre 1974)

M.-F. Vigneras

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
351, Cours de la Libération
F-33405 Talence

vide-leer-empty