Chapitre 3. Nombre de classes d'un ordre d'eichler sur un corps quadratique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Les congruences suivantes sont bien connues:

$$p \equiv \ \ 3\,(8) \qquad h(-2p) \equiv 2\,(4) \quad \text{donc} \quad \frac{h(-2p)}{4} - \frac{h(-p)}{2} \in \mathbf{Z}$$

$$p \equiv -1\,(8) \qquad h(-2p) \equiv 0\,(4) \quad \text{donc} \quad \frac{h(-2p)}{4} \in \mathbf{Z}$$

et nous obtenons:

COROLLAIRE 2.1. *Soit p un nombre premier. Les quantités suivantes sont des entiers :*

$$\begin{array}{lll} & p \equiv \ \ 1\,(4) & \dfrac{\zeta_p(-1)}{2} + \dfrac{h(-3p)}{6} + \dfrac{h(-p)}{8} \\ (23) & p \equiv \ \ 3\,(8) & \dfrac{\zeta_p(-1)}{2} + \dfrac{h(-3p)}{6} + \dfrac{3}{4}\,h(-p) \\ & p \equiv -1\,(8) & \dfrac{\zeta_p(-1)}{2} + \dfrac{h(-3p)}{6} \end{array}$$

Ces nombres représentent la caractéristique d'Euler-Poincaré du groupe modulaire de $k = \mathbf{Q}(\sqrt{p})$ calculée par Hirzebruch [8].

CHAPITRE 3. NOMBRE DE CLASSES D'UN ORDRE D'EICHLER SUR UN CORPS QUADRATIQUE

On explicite la formule (16) du nombre de classes d'idéaux d'un ordre d'Eichler sur un corps quadratique.

Soit m un entier positif et $k = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$; on note respectivement R_m, $h(m)$, $\zeta_m(-1)$, $N_m(.)$, l'anneau des entiers, le nombre de classes, la valeur au point -1 de la fonction zêta, la norme absolue du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$; soit D_1 un produit d'un nombre pair d'idéaux premiers distincts de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ et soit D_2 un autre produit d'idéaux premiers distincts de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$, premier à D_1. Le nombre de classes des ordres d'Eichler sur $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ d'invariant (D_1, D_2) est égal à

$$H = H_m(D_1, D_2) = \frac{h(m)\,\Phi_m(-1)\,\zeta_m(D_1, D_2)}{2} +$$

$$\sum_O \frac{w(O)-1}{2\,w(O)} E_{D_1,D_2}(O)\,h(O) \tag{24}$$

où on a posé

$$\Phi_m(D_1, D_2) = \prod_{\mathfrak{p}|D_1} (N\mathfrak{p}-1) \prod_{\mathfrak{p}|D_2} (N\mathfrak{p}+1);$$

la sommation porte sur les ordres O des extensions quadratiques totalement imaginaires de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ telles que l'indice $w(O) = [O^* : R_m^*]$ soit supérieur à 1. Si $m \neq 2, 3, 5$ l'ordre O est contenu dans $k_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-1})$, $k_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$ ou $k_\varepsilon = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-\varepsilon})$ si l'unité fondamentale ε est totalement positive, c'est-à-dire de norme $+1$; les corps k_3 et k_ε sont confondus si l'indice des unités Q_3 de k_3 est égal à 2. Nous posons $i = \sqrt{-1}$, $\rho = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et nous notons Q_2 l'indice des unités de k_2.

Nous rappelons d'abord quelques résultats sur l'indice des unités et sur le nombre de classes des corps biquadratiques imaginaires qui sont démontrés par H. Hasse [7].

1. *Corps biquadratiques*

PROPOSITION 3.1. *Si l'unité fondamentale ε de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ est totalement positive, le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-\varepsilon})$ est un corps biquadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-n})$ où $n = \operatorname{Tr}\varepsilon - 2$ modulo les carrés. Le nombre de classes h_ε de $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-n})$ est*

$$h\varepsilon = h(m)\,h(-n)\,h(-n') \tag{25}$$

où $nn' = m$ *ou* $4m$.

PROPOSITION 3.2. *Les corps biquadratiques imaginaires suivants ont un indice d'unités égal à* 2 :

$\mathbf{Q}(\sqrt{-q_1}, \sqrt{-q_2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-q})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-2q})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-q})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-2q})$.

où les nombres q, q_1, q_2 sont premiers et congrus à 3 *modulo* 4.

PROPOSITION 3.3. *Le nombre de classes de* $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-1})$ *est*

$$h_2 = \frac{Q_2}{2} h(m) h(-m) . \tag{26}$$

Pour que Q_2 soit égal à 2, il faut et il suffit qu'il existe une unité η vérifiant $\eta^2 = \sqrt{-1}\,\varepsilon$. Alors le conducteur de l'ordre $R_m(1, \eta)$ est

$$f_\eta = 1 \quad \text{si} \quad m \equiv 2(4)$$
$$f_\eta = \mathfrak{p}_2 \quad \text{si} \quad m \equiv -1(4)$$

On note $\mathfrak{p}_q$ un idéal premier de $(\mathbf{Q}\sqrt{m})$ au-dessus de q.

Si $m \equiv 1$ (4) l'indice des unités Q_2 est égal à 1. Le discriminant relatif d_2 de $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-1})$ sur $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ est

$$d_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } m \equiv -1(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv 2(4) \\ 4 & \text{si } m \equiv 1(4) \end{cases}$$

Le conducteur de l'ordre $R_m(1, \sqrt{-1})$ est

$$f_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } m \equiv 1(4) \\ \mathfrak{p}_2 & \text{si } m \equiv 2(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv -1(4) \end{cases} \tag{27}$$

PROPOSITION 3.4. *Le nombre de classes de* $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$ *est*

$$h_3 = \frac{Q_3}{2} h(m) h(-3m) . \tag{28}$$

Pour que Q_3 soit égal à 2, il faut et il suffit que $\sqrt{-\varepsilon}$ appartienne à $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$, Il est nécessaire que $m \equiv 0$ (3); le conducteur de l'ordre $R_m(1, \sqrt{-\varepsilon})$ est

$$f_\varepsilon = 2 \tag{29}$$

Le discriminant relatif d_3 de $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$ sur $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ est

$$d_3 = \begin{cases} 3 & \text{si } m \not\equiv 0(3) \\ 1 & \text{si } m \equiv 0(3) \end{cases}$$

Le conducteur de l'ordre $R_m(1, \rho)$ est

$$f_3 = \begin{cases} 1 & \text{si } m \not\equiv 0\,(3) \\ \mathfrak{p}_3 & \text{si } m \equiv 0\,(3) \end{cases} \tag{30}$$

Nous supposons que $m \neq 2, 3, 5$. Nous calculons la somme $\sum_{O}$ de la relation (16) en la décomposant en 2 ou 3 parties suivant le cas:

$$\sum_{O} = \sum_{O \subset k_2} + \sum_{O \subset k_3} + \sum_{O \subset k_\varepsilon} \tag{31}$$

le troisième terme de la somme pouvant disparaître éventuellement. Nous notons respectivement S_2, S_3, S_ε ces trois sommes.

2. *Calcul de* S_2

Par définition, on a

$$E_{D_1,D_2}(O) = \prod_{\mathfrak{p} \mid D_1} \left(1 - \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right) \prod_{\mathfrak{p} \mid D_2} \left(1 + \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right)$$

Ce nombre dépend de m, D_1, D_2, du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, O)$ et des idéaux premiers divisant le conducteur $f = f(O)$ de l'ordre O dans ce corps. Nous le noterons

$$E^{(i)}_{D_1,D_2}(f)$$

l'indice i étant égal à 2, 3 ou ε.

a) *L'indice des unités* Q_2 *est égal à* 1.

Nous avons

$$S_2 = \sum_{O \subset k_2} \frac{w(O) - 1}{2\, w(O)} h(O)\, E_{D_1,D_2}(O) = \frac{1}{4} \sum_{i \in O} h(O)\, E_{D_1,D_2}(O)$$

Nous avons caclulé dans le paragraphe précédent le conducteur de l'ordre $R_m(1, i)$ et nous avons donné dans le premier chapitre la formule du nombre de classes h (0) qui s'écrit avec nos hypothèses

$$h(O) = \frac{h(m)\, h(-m)}{2} N f\,(O) \prod_{\mathfrak{p} \mid f(O)} \left(1 - \frac{\left(\frac{k_2}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

Si $m \equiv 1$ (4), l'ordre $R_m(1, i)$ est maximal donc on a:

$$S_2 = \frac{h(m)\, h(-m)}{8} E^{(2)}_{D_1,D_2}(1) \tag{32}$$

Si $m \equiv 2$ (4), l'ordre $R_m(1, i)$ a pour conducteur l'idéal premier $\mathfrak{p}_2$ qui est ramifié dans k_2; il a pour nombre de classes $h(m)\, h(-m)$ et on a:

$$S_2 \equiv \frac{h(m)\, h(-m)}{8} \left[E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 2\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(2)\right] \tag{33}$$

Si $m \equiv -1$ (8), l'idéal premier $\mathfrak{p}_2$ est décomposé dans k_2, l'ordre $R_m(1, i)$ a pour conducteur 2 et pour nombre de classes $h(m)\, h(-m)$, l'ordre de conducteur $\mathfrak{p}_2$ a pour nombre de classes $\dfrac{h(m)\, h(-m).}{2}$ On a:

$$S_2 = \frac{h(m)\, h(-m)}{8} \left[E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 3\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(2)\right] \tag{34}$$

Si $m \equiv 3$ (8), l'idéal premier $\mathfrak{p}_2$ est inerte dans k_2; les ordres de conducteur 2 et $\mathfrak{p}_2$ ont pour nombre de classes $3\, h(m)\, h(-m)$ et $\dfrac{3}{2}\, h(m)\, h(-m)$ respectivement. On a

$$S_2 = \frac{h(m)\, h(-m)}{8} \left[E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 9\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(2)\right] \tag{35}$$

b) *L'indice des unités Q_2 est égal à* 2.

Comme $i \in R_m(1, \eta)$ nous avons:

$$S_2 = \sum_{O \subset k_2} \frac{w(O) - 1}{2\, w(O)}\, h(O)\, E_{D_1, D_2}(O) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in O \\ \eta \notin O}} \frac{h(O)}{w(O)}\, E_{D_1, D_2}(O) + \frac{3}{2} \sum_{\eta \in O} \frac{h(O)}{w(O)}\, E_{D_1, D_2}(O)\,.$$

On a

$$\frac{h(O)}{w(O)} = \frac{h(m)\, h(-m)}{4}\, N f(O) \prod_{\mathfrak{p} \mid f(O)} \left(1 - \frac{\left(\frac{k_2}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

Nous obtenons facilement les formules suivantes:

Si $m \equiv 2$ (4)

$$S_2 = \frac{h(m)\, h(-m)}{8} \left[3\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 2\, E_{D_1, D_2}(2)\right] \tag{36}$$

Si $m \equiv -1\ (8)$

$$S_2 = \frac{h(m)\,h(-m)}{8}\left[3\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(1) + 5\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(2)\right] \tag{37}$$

Si $m \equiv 3\ (8)$

$$S_2 = \frac{h(m)\,h(-m)}{8}\left[3\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(1) + 15\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(2)\right] \tag{38}$$

3. *Calcul de* S_3

a) *L'indice des unités* Q_3 *est égal à* 1.

Si O est un ordre contenu dans k_3, il vérifie:

$$\frac{h(O)}{w(O)} = \frac{h(m)\,h(-3m)}{6}\,N f(O) \prod_{\mathfrak{p} \mid f(O)} \left(1 - \frac{\left(\frac{k_3}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

Nous avons

$$S_3 = \sum_{O \subset k_3} \frac{h(O)}{w(O)}\,E_{D_1,D_2}(O)$$

Si $m \not\equiv 0\ (3)$, l'ordre $R_m(1, \rho)$ est maximal donc on a:

$$S_3 = \frac{h(m)\,h(-3m)}{6}\,E^{(3)}_{D_1,D_2}(1) \tag{39}$$

Si $m \equiv 6\ (9)$, l'ordre $R_m(1, \rho)$ a pour conducteur l'idéal $\mathfrak{p}_3$ qui est décomposé dans k_3. On a

$$S_3 = \frac{h(m)\,h(-3m)}{6}\left[E^{(3)}_{D_1,D_2}(1) + 2\,E^{(3)}_{D_1,D_2}(3)\right] \tag{40}$$

Si $m \equiv 3\ (9)$, l'ordre $R_m(1, \rho)$ a pour conducteur l'idéal $\mathfrak{p}_3$ qui est inerte dans k_3. On a

$$S_3 = \frac{h(m)\,h(-3m)}{6}\left[E^{(3)}_{D_1,D_2}(1) + 4\,E^{(3)}_{D_1,D_2}(3)\right] \tag{41}$$

b) *L'indice des unités* Q_3 *est égal à* 2.

C'est le cas où $k_3 = k_\varepsilon$. Les ordres $R_m(1, \rho)$ et $R_m(1, \sqrt{-\varepsilon})$ ont pour conducteur $\mathfrak{p}_3$ et 2.

La somme sur les ordres $O \subset k_3$ s'écrit

$$S_3 = \frac{5}{2} \sum_{\substack{\rho \in O \\ \sqrt{-\varepsilon} \in O}} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1,D_2}(O) + \sum_{\substack{\rho \in O \\ \sqrt{-\varepsilon} \notin O}} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1,D_2}(O)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{\sqrt{-\varepsilon} \in O \\ \eta \notin O}} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1,D_2}(O)$$

On peut écrire cette formule sous la forme suivante:

$$(42) \qquad S_3 = \frac{h(m)\,h(-3m)}{12} \left[5\, E^{(3)}_{D_1,\,D_2}(1) + 2\, b\, E^{(3)}_{D_1,\,D_2}(3) + c\, E^{(3)}_{D_1,\,D_2}(2)\right]$$

où

$$b = N\mathfrak{p}_3 \left(1 - \frac{\left(\frac{k_3}{\mathfrak{p}_3}\right)}{N\mathfrak{p}_3}\right) \quad \text{et} \quad c = \sum_{\substack{f \mid 2 \\ f \neq 1}} N f \prod_{\mathfrak{p} \mid f} \left(1 - \frac{\left(\frac{k_3}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

On calcule facilement b et c. On a

$$(43) \qquad b = \begin{cases} 4 & \text{si } m \equiv 3\,(9) \\ 2 & \text{si } m \equiv 6\,(9) \end{cases}$$

$$c = \begin{cases} 9 & \text{si } m \not\equiv 1\,(4) \\ 15 & \text{si } m \equiv 1\,(8) \\ 3 & \text{si } m \equiv 5\,(8) \end{cases}$$

4. *Calcul de* S_ε

Si $k_\varepsilon \neq k_3$ il nous reste à calculer un terme pour avoir la valeur H du nombre de classes. On a

$$S_\varepsilon = \sum_{\sqrt{-\varepsilon} \in O} \frac{w(O) - 1}{2\, w(O)} h(O)\, E_{D_1,D_2}(O) = \frac{h(m)\,h(-n)\,h(-n')}{4} c(m)$$

où $c(m)$ est un entier que l'on déterminera dans chaque cas. Il est défini par la formule suivante:

$$(44) \qquad c(m) = E^{(\varepsilon)}_{D_1,\,D_2}(1) + \sum_{\substack{f \mid f_3 \\ f \neq 1}} E^{(\varepsilon)}_{D_1,\,D_2}(f)\, N f \prod_{\mathfrak{p} \mid f} \left(1 - \frac{\left(\frac{k_\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

5. *Cas particuliers :* $m = 2, 3, 5$.

Il nous reste à examiner ces trois cas. Si $m = 2$, la norme de l'unité fondamentale étant -1, les indices d'unités sont égaux à 1; il n'existe pas de somme S_ε, la somme S_3 est donnée par la formule (39), la somme S_2 est exceptionelle car $k_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})$ contient une unité d'ordre 8. On a:

$$S_2 = \frac{3}{8} E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + \frac{1}{4} E^{(2)}_{D_1, D_2}(2) \tag{45}$$

Si $m = 3$, l'unité fondamentale ε est totalement positive et égale à $\varepsilon = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$. Le corps k_ε est $\mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-2})$; l'ordre $R_3(1, \sqrt{-\varepsilon})$ est maximal, donc on a:

$$S_\varepsilon = \frac{h(3)\,h(-2)\,h(-6)}{4} E^{(\varepsilon)}_{D_1, D_2}(1) = \frac{1}{2} E^{(\varepsilon)}_{D_1, D_2}(1) \tag{46}$$

Les sommes S_2 et S_3 sont exceptionelles car $k_2 = k_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-1}) = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-3})$. Les ordres O contenus dans k_2 tels que $w(O) \neq 0$ sont donnés dans le tableau suivant:

$f(O)$	1	$\mathfrak{p}_2$	2	$\mathfrak{p}_3$
$w(O)$	12	4	2	3
$h(O)$	1	1	1	1

Nous en déduisons facilement la valeur de S_2:

$$S_2 = \frac{11}{24} E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + \frac{5}{8} E^{(2)}_{D_1, D_2}(2) + \frac{1}{3} E^{(2)}_{D_1, D_2}(3) \tag{47}$$

Si $m = 5$, la norme de l'unité fondamentale est -1 et les sommes S_2, S_3 sont données par les formules (32), (39). Mais $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ est le sous-corps réel maximal du 5-ème corps cyclotomique k_5 et la formule (31) doit être remplacée par:

$$\sum_{O} = \sum_{O \subset k_2} + \sum_{O \subset k_3} + \sum_{O \subset k_5} \tag{48}$$

Il est facile de calculer la somme S_5 ainsi introduite:

$$S_5 = \frac{2}{5} E^{(5)}_{D_1, D_2}(1) \tag{49}$$

6. *Théorèmes*

Tous les calculs de ce chapitre ont été effectués pour obtenir les résultats suivants:

THÉORÈME 3.1. *Le nombre de classes d'un ordre d'Eichler d'invariant* (D_1, D_2) *sur un corps quadratique* $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$, *où* m *est un entier positif sans facteur carré et différent de* 2, 3. 5, *est égal à*

$$\begin{aligned} H_m(D_1, D_2) = h(m) \Big[& \frac{\zeta_m(-1)\, \Phi_m(D_1, D_2)}{2} + \frac{h(-m)}{8} a(m) \\ & + \frac{h(-3m)}{12} b(m) + \frac{h(-n)\, h(-n')}{4} c(m) \Big], \end{aligned} \tag{50}$$

où les nombres entiers $a(m)$, $b(m)$, $c(m)$ *sont déterminés par les relations*

$$S_2 = \frac{h(m)\, h(-m)}{8} a(m)$$

$$S_3 = \frac{h(m)\, h(-3m)}{12} b(m)$$

$$S_\varepsilon = \frac{h(m)\, h(-n)\, h(-n')}{4} c(m)$$

THÉOREME 3.2. *Le nombre de classes des ordres d'Eichler d'invariant* (D_1, D_2) *sur les corps* $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ *est respectivement égal à*

$$H_2(D_1, D_2) = \frac{\Phi_2(D_1, D_2)}{24} + \frac{3 E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 2 E^{(2)}_{D_1, D_2}(2)}{8} + \frac{E^{(3)}_{D_1, D_2}(1)}{3} \tag{51}$$

$$H_3(D_1, D_2) = \frac{\Phi_3(D_1, D_2)}{12} + \frac{11\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 15\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(2) + 8\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(3)}{24} + \frac{E^{(\varepsilon)}_{D_1, D_2}(1)}{2}$$

$$H_5(D_1, D_2) = \frac{\Phi_5(D_1, D_2)}{30} + \frac{E^{(2)}_{D_1, D_2}(1)}{4} + \frac{E^{(3)}_{D_1, D_2}(1)}{3} + \frac{2\, E^{(5)}_{D_1, D_2}(1)}{5}\,.$$

Appendice:

Calcul des nombres de classes des ordres d'Eichler sur le corps des nombres rationnels

Nous avons calculé sur ordinateur les nombres H_{D_1,D_2}, T_{D_1,D_2}, $H^{+}_{D_1,D_2}$ pour les ordres d'Eichler d'invariant (D_1, D_2) sur le corps des nombres rationnels. Nous avons utilisé les résultats théoriques du chapitre 1.

D_1 désigne un produit d'un nombre impair de nombres premiers sans facteur carré,

D_2 désigne un produit de nombres premier sans facteur carré tel que $(D_1, D_2) = 1$.

s est le nombre de diviseurs premiers de $D_1\, D_2$.

$h(-m)$ est le nombre de classes du corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, $d(-m)$ est son discriminant:

$$d(-m) = \begin{cases} -m & \text{si } m \equiv -1\,(4) \\ -4m & \text{si } m \not\equiv -1\,(4)\,. \end{cases}$$

$E^{(m)}_{D_1, D_2} = \prod_{p \mid D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{p \mid D_2} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$ est le symbole $E_{D_1,D_2}(O)$ correspondant à l'ordre maximal O de $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$.

$F^{(m)}_{D_1, D_2} = 2 \prod_{p \mid D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{\substack{p \mid D_2 \\ p \neq 2}} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$ est le symbole correspondant à l'ordre de conducteur 2 de $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ si D_2 est pair et $m \equiv 3\,(8)$.

On pose

$$\lambda(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \not\equiv -1\,(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv 7\,(8) \text{ ou si } m = 3 \\ 4 & \text{si } m \equiv 3\,(8) \text{ et } m \neq 3\,, \end{cases}$$