**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 21 (1975)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
**Autor:** Guenot, J. / Narasimhan, R.
**Kapitel:** § 1. DÉFINITIONS
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-47334

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 12.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# CHAPITRE 0

# VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

## § 1. DÉFINITIONS

On dit qu'un espace topologique est une *variété topologique* s'il est séparé et si tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ensemble ouvert d'un espace numérique.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de cette définition et de quelques résultats classiques de topologie générale (que l'on trouve dans [1], chap. I, par exemple).

LEMME 1. *Toute variété topologique est un espace localement connexe, localement compact et localement de type dénombrable. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

*(1) Elle est paracompacte.*

*(2) Chacune de ses composantes connexes est de type dénombrable.*

*(3) Chacune de ses composantes connexes est dénombrable à l'infini.*

Sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés considérées sont paracompactes.

Soit $X$ une variété topologique.

On appelle *carte de* $X$ tout homéomorphisme $\phi$ d'un ensemble ouvert $U$ de $X$ (appelé le *domaine de* $\phi$) sur un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Soient $x$ un point de $U$ et $r$ un nombre réel strictement positif. On appelle *boule de centre* $x$ *et de rayon* $r$ *dans* $\phi$ l'image réciproque de la boule $B(\phi(x), r)$ de centre $\phi(x)$ et de rayon $r$ dans $\mathbf{R}^n$. On dit que $\phi$ est *centrée au point* $x$ si $\phi(x)$ est l'origine.

Soient $\phi$ et $\psi$ deux cartes de $X$ de domaines respectifs $U$ et $V$. On appelle *changement de cartes de* $\phi$ *dans* $\psi$ l'homéomorphisme $\gamma$ de $\phi(U \cap V)$ dans $\psi(U \cap V)$ défini par

$$\gamma(x) = \psi(\phi^{-1}(x)).$$

On dit que $\phi$ et $\psi$ sont *compatibles* si $\gamma$ est un difféomorphisme (i.e. si $\gamma$ et $\gamma^{-1}$ sont indéfiniment dérivables).

On appelle *atlas de* $X$ tout ensemble de cartes deux à deux compatibles dont les domaines recouvrent $X$. On dit que deux atlas sont *compatibles* si leur réunion est un atlas. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures différentielles de* $X$.

On appelle *variété différentielle* toute variété topologique munie d'une structure différentielle.

Soit $X$ une variété différentielle.

On appelle (abusivement) *atlas de* $X$ tout atlas appartenant à la structure différentielle de $X$ et *carte de* $X$ toute carte appartenant à un atlas de $X$.

Soit $x$ un point de $X$. Toutes les cartes de $X$ dont le domaine contient $x$ prennent leurs valeurs dans le même espace numérique. La dimension de cet espace s'appelle la *dimension de* $X$ *au point* $x$ et se désigne par $\dim_x(X)$. La fonction $\dim(X)$ est localement constante. On dit que $X$ est de *dimension pure* si elle est constante.

On appelle *courbe différentielle* (resp. *surface différentielle*) toute variété différentielle de dimension pure 1 (resp. 2).

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$ et soit $f$ une application de $X$ dans $E$. Pour toute carte $\phi$ de domaine $U$ dans $X$, l'application $f_\phi$ de $\phi(U)$ dans $E$ définie par

$$f_\phi(x) = f(\phi^{-1}(x))$$

s'appelle l'*expression de* $f$ *dans* $\phi$. Si $\psi$ est une deuxième carte de domaine $V$ et si $\gamma$ désigne le changement de cartes de $\phi$ dans $\psi$, on a

$$f_\phi(x) = f_\psi(\gamma(x))$$

pour tout point $x$ de $\phi(U \cap V)$.

Soit $k$ un entier naturel (ou le symbole $\infty$). On dit que $f$ est *k-fois continûment dérivable* s'il en est ainsi de son expression dans toute carte de $X$ (ou ce qui revient au même dans toute carte d'un atlas de $X$). On désigne par $\mathscr{C}^k(X, E)$ l'ensemble de ces applications.

Remarquons que $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$ est une sous-algèbre de $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ et $\mathscr{C}^k(X, E)$ un sous-$\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$-module de $\mathscr{F}(X, E)$, en désignant par $\mathscr{F}(X, E)$ l'ensemble de toutes les applications de $X$ dans $E$.

Si $X$ est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$, on munit l'ensemble $\mathscr{C}^k(X, E)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes des dérivées jusqu'à l'ordre $k$. C'est un espace de Fréchet.

Dans le cas général, l'expression dans une carte $\phi$ de domaine $U$ induit une application linéaire de $\mathscr{C}^k(X, E)$ dans $\mathscr{C}^k(\phi(U), E)$ et l'on munit

$\mathscr{C}^k(X, E)$ de la topologie la moins fine rendant ces applications continues. C'est un espace localement convexe et complet. C'est un espace de Fréchet si $X$ est dénombrable à l'infini.

Pour tout ensemble compact $K$ de $X$, l'ensemble $\mathscr{C}^k_K(X, E)$ des fonctions dont le support est contenu dans $K$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}^k(X, E)$.

L'ensemble $\mathscr{C}^k_c(X, E)$ des fonctions de $\mathscr{C}^k(X, E)$ à support compact est un espace localement convexe et complet pour la topologie vectorielle limite inductive des espaces $\mathscr{C}^k_K(X, E)$.

Soient $X$ et $Y$ deux variétés différentielles et soit $u$ une application continue de $X$ dans $Y$.

Désignons par $\phi$ une carte de domaine $U$ dans $X$ et par $\psi$ une carte de domaine $V$ dans $Y$. On appelle *expression de $u$ dans $(\phi, \psi)$* l'application

$$u_{\psi\phi} : \phi\left(U \cap u^{-1}(V)\right) \to \psi(V)$$

définie par

$$u_{\psi\phi}(x) = \psi\left(u\left(\phi^{-1}(x)\right)\right).$$

On dit que $u$ est *k-fois continûment dérivable* s'il en est ainsi de son expression dans tout couple de cartes. On désigne par $\mathscr{C}^k(X, Y)$ l'ensemble de ces applications.

On dit que l'application $u$ est un *isomorphisme* (ou un *difféomorphisme*) si elle est bijective et si $u$ et $u^{-1}$ sont indéfiniment dérivables.

Les variétés différentielles, les applications indéfiniment dérivables et leur composition usuelle forment une catégorie.

LEMME 2. *Soient $X$ et $Y$ deux variétés différentielles. Pour qu'une application continue $u$ de $X$ dans $Y$ soit indéfiniment dérivable, il faut et il suffit que l'application $u^*$ de $\mathscr{F}(Y, \mathbf{R})$ dans $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ définie par*

$$u^*(f) = f \cdot u$$

*envoie $\mathscr{C}^\infty(Y, \mathbf{R})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$.*

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soient $\phi$ une carte de domaine $U$ dans $X$ et $\psi$ une carte de domaine $V$ contenant $u(U)$ dans $Y$. On désigne par $\psi_1, \ldots, \psi_m$ les fonctions coordonnées de $\psi$ et par $v_1, \ldots, v_m$ les fonctions coordonnées de $u_{\psi\phi}$. Pour tout point $x$ de $\phi(U)$, il existe une fonction $\alpha$ de $\mathscr{C}^\infty_c(V, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de $u(\phi^{-1}(x))$ (appendice I, lemme 3). Les fonctions $u^*(\alpha\psi_1), \ldots, u^*(\alpha\psi_m)$ appartiennent à $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$. On conclut en remarquant que leur expression dans $\phi$ coïncide avec $v_1, \ldots, v_m$ au voisinage de $x$.

*Exemple 1.*

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n$. Tout isomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire de $E$ sur $\mathbf{R}^n$ est une carte et deux telles cartes sont évidemment compatibles. Nous munirons toujours $E$ de la structure différentielle correspondante.

*Exemple 2.*

On dit qu'un sous-espace $Y$ d'une variété différentielle est une *sous-variété* s'il vérifie la condition suivante:

(*SV*) Pour tout point $x$ de $Y$, il existe une carte $\phi$ de $X$ centrée en $x$, de domaine $U$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, et un entier naturel $m$ au plus égal à $n$ tels que

$$\phi\,(U \cap Y) = \phi\,(U) \cap (\mathbf{R}^m \oplus 0).$$

Les cartes de la forme $\phi\,|_{U \cap Y}$ définissent une structure différentielle sur $Y$ que l'on dit *induite par* $X$. Nous munirons toujours une sous-variété de la structure différentielle induite.

Notons que l'injection canonique de $Y$ dans $X$ est indéfiniment dérivable et que $Y$ est un sous-espace localement fermé de $X$. Enfin tout ensemble ouvert de $X$ est une sous-variété.

*Exemple 3.*

Soient $X$ et $Y$ deux variétés différentielles. Pour toute carte $\phi$ de $X$ et toute carte $\psi$ de $Y$, l'application $\phi \times \psi$ est une carte du produit $X \times Y$. Deux telles cartes sont évidemment compatibles. On munit toujours $X \times Y$ de la structure différentielle correspondante.

Les projections canoniques de $X \times Y$ dans chacun de ses facteurs sont indéfiniment dérivables. L'application diagonale induit un difféomorphisme de $X$ sur une sous-variété fermée de $X \times X$.

*Exemple 4.*

Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques séparés et soit $u$ un homéomorphisme local de $X$ dans $Y$.

Si $Y$ est une variété topologique, il en est de même de chacune des composantes connexes de $X$ (appendice II, théorème 1). De plus, pour toute structure différentielle de $Y$, il existe une structure différentielle de $X$ et une seule faisant de $u$ un difféomorphisme local.

Si $u$ est surjective et si $X$ est une variété topologique, il en est de même de $Y$. De plus, pour toute structure différentielle de $X$, il existe une structure différentielle de $Y$ et une seule faisant de $u$ un difféomorphisme local.

*Exemple 5.*

Pour tout entier naturel $n$, on désigne par $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ l'ensemble des droites issues de l'origine dans $\mathbf{R}^{n+1}$ et par $\pi$ la projection de $\mathbf{R}^{n+1}\backslash 0$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ associant à tout point $(x_0, \ldots, x_n)$ la droite $(x_0 : \ldots : x_n)$ qu'il définit. Muni de la topologie quotient, l'espace $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est compact et connexe.

Pour tout entier $j$ compris entre 0 et $n$, on pose

$$U_j = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{R}) \mid x_j \neq 0\}.$$

L'application $\phi_j$ de $U_j$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$\phi_j(x_0 : \ldots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_j}, \ldots, \widehat{\frac{x_j}{x_j}}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right)$$

est une carte de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. On vérifie aisément que ces cartes sont deux à deux compatibles. Muni de la structure différentielle correspondante, l'ensemble $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ s'appelle l'*espace projectif réel de dimension* $n$.

Soient $X$ et $Y$ deux variétés différentielles de dimension pure $n$ et $m$ respectivement et soit $u$ une application indéfiniment dérivable de $X$ dans $Y$.

Pour tout point $x$ de $X$, le rang à l'origine de l'application $u_{\psi\phi}$ est indépendant de la carte $\phi$ centrée en $x$ et de la carte $\psi$ centrée en $u(x)$. On l'appelle le *rang de* $u$ *au point* $x$ et on le désigne par $rg_x(u)$.

On dit que $x$ est un *point régulier* (resp. un *point critique*) *de* $u$ si $rg_x(u)$ est égal à $m$ (resp. strictement inférieur à $m$). On dit qu'un point $y$ de $Y$ est une *valeur régulière* (resp. une *valeur critique*) *de* $u$ si tous les points de $u^{-1}(y)$ sont réguliers (resp. s'il existe un point critique dans $u^{-1}(y)$).

Les deux théorèmes suivants sont des conséquences immédiates des versions locales correspondantes (appendice I, théorèmes 1 et 4).

THÉORÈME 1 (Fonctions réciproques). *Supposons* $n$ *égal à* $m$. *Si l'application* $u$ *est de rang* $n$ *en un point* $x$ *de* $X$, *elle induit un isomorphisme d'un voisinage de* $x$ *sur un voisinage de* $u(x)$.

THÉORÈME 2 (Sard). *Si* $X$ *est dénombrable à l'infini, l'ensemble des valeurs critiques de* $u$ *n'a pas de point intérieur. Si* $y$ *est une valeur régulière de* $u$, *alors* $u^{-1}(y)$ *est une sous-variété de dimension* $n-m$ *dans* $X$.

*Remarque 1.*

En fait, l'ensemble des valeurs critiques de $u$ est de mesure nulle. C'est une conséquence immédiate de la définition donnée au paragraphe 4 et du théorème de Sard donné dans l'appendice I.

LEMME 3. *Soit $X$ une variété différentielle et soient $x$ et $y$ des points de $X$. Pour tout voisinage connexe $V$ de $\{x, y\}$, il existe un difféomorphisme $u$ de $X$ sur elle-même tel que*

$$u(x) = y \qquad et \qquad u|_{X \setminus V} = 1_{X \setminus V}.$$

*En particulier, si $X$ est connexe, le groupe des difféomorphismes opère transitivement sur $X$.*

Il existe une famille $(\phi_j)_{0 \leq j \leq k}$ de cartes de $X$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout entier $j$ compris entre 0 et $k$, la carte $\phi_j$ est centrée au point $x_j$, son domaine $U_j$ est contenu dans $V$ et l'ensemble $\phi_j(U_j)$ est un cube de $\mathbf{R}^n$.

(2) Le point $x_0$ coïncide avec $x$, le point $x_k$ coïncide avec $y$ et pour tout entier $j$ compris entre 0 et $k-1$, le point $x_{j+1}$ appartient à $U_j$.

Il existe alors un difféomorphisme $u_j$ de $X$ sur elle-même tel que

$$u_j(x_j) = x_{j+1} \qquad\qquad u_j|_{X \setminus V} = 1_{X \setminus V}$$

(appendice I, lemme 4). Il suffit de poser

$$u = u_{k-1} \cdot \ldots \cdot u_0 .$$

Soit $X$ une variété différentielle et soit $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de $X$. On appelle *partition de l'unité subordonnée à* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ toute famille $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ de fonctions indéfiniment dérivables à valeurs réelles positives sur $X$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout indice $\iota$, le support de $\alpha_\iota$ est contenu dans $U_\iota$.

(2) La famille des supports des $\alpha_\iota$ est localement finie.

(3) Pour tout point $x$ de $X$, la somme des $\alpha_\iota(x)$ (qui existe d'après (2)) est égale à 1.

PROPOSITION 1. *Pour tout recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de $X$, il existe une partition de l'unité $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ subordonnée à $(U_\iota)_{\iota \in I}$* [1]).

Il existe deux recouvrements ouverts $(V_\kappa)_{\kappa \in K}$ et $(W_\kappa)_{\kappa \in K}$ localement finis et plus fins que $(U_\iota)_{\iota \in I}$ tels que $V_\kappa$ soit un domaine de carte relativement compact dans $X$ et $W_\kappa$ un ensemble relativement compact dans $V_\kappa$ ([1], chap. IX, § 4, théorème 3).

---

[1]) C'est ici la première fois que nous utilisons l'hypothèse de paracompacité que nous avons faite sur les variétés.

Désignons par $\beta_\kappa$ une fonction indéfiniment dérivable à valeurs réelles positives sur $X$ dont le support est contenu dans $V_\kappa$ et égale à 1 sur $W_\kappa$ (appendice I, lemme 3).

Il suffit alors de poser

$$\alpha_\iota = \left( \sum_{\tau(\kappa)=\iota} \beta_\kappa \right) \left( \sum_{\kappa \in K} \beta_\kappa \right)^{-1}$$

où $\tau$ désigne une application de raffinement de $K$ dans $I$.

COROLLAIRE. *Pour tout ensemble compact $K$ de $X$ et tout voisinage $U$ de $K$, il existe une fonction $\alpha$ de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})$ dont le support est contenu dans $U$ et égale à 1 sur $K$.*

On dit qu'un atlas d'une variété différentielle est *orienté* si le jacobien des changements de cartes est positif. Deux atlas orientés sont dits *compatibles* si leur réunion est un atlas orienté. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *orientations de $X$*.

On dit qu'une variété différentielle est *orientable* si elle possède un atlas orienté. On dit qu'une variété différentielle est *orientée* si elle est orientable et munie d'une orientation.

Soit $X$ une variété différentielle orientée. On appelle (abusivement) *atlas orienté de $X$* tout atlas appartenant à l'orientation de $X$ et *carte orientée de $X$* toute carte appartenant à un atlas orienté de $X$.

LEMME 4. *Toute variété différentielle $X$ orientable, connexe de dimension strictement positive possède exactement deux orientations.*

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux atlas orientés de $X$. Désignons par $\phi$ une carte de $\mathscr{A}$ et par $\psi$ une carte de $\mathscr{B}$. Le signe du jacobien du changement de cartes de $\phi$ dans $\psi$ est indépendant de ces cartes. Comme c'est une fonction localement constante, on voit que $X$ possède au plus deux orientations.

D'autre part, l'ensemble des cartes de la forme $(-\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ où $\phi$ parcourt $\mathscr{A}$ est un atlas orienté de $X$ non compatible avec $\mathscr{A}$ ce qui démontre l'assertion.

*Remarque 2.*

Toute variété différentielle connexe de dimension 0 est réduite à un point. Elle est évidemment orientable. Par convention, on dit qu'elle possède deux orientations notées 1 et $-1$.