§ 1. DÉFINITIONS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

CHAPITRE 0

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

§ 1. DÉFINITIONS

On dit qu'un espace topologique est une *variété topologique* s'il est séparé et si tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ensemble ouvert d'un espace numérique.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de cette définition et de quelques résultats classiques de topologie générale (que l'on trouve dans [1], chap. I, par exemple).

LEMME 1. *Toute variété topologique est un espace localement connexe, localement compact et localement de type dénombrable. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Elle est paracompacte.

(2) Chacune de ses composantes connexes est de type dénombrable.

(3) Chacune de ses composantes connexes est dénombrable à l'infini.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés considérées sont paracompactes.

Soit X une variété topologique.

On appelle *carte de* X tout homéomorphisme ϕ d'un ensemble ouvert U de X (appelé le *domaine de* ϕ) sur un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Soient x un point de U et r un nombre réel strictement positif. On appelle *boule de centre* x *et de rayon* r *dans* ϕ l'image réciproque de la boule $B(\phi(x), r)$ de centre $\phi(x)$ et de rayon r dans $\mathbf{R}^n$. On dit que ϕ est *centrée au point* x si $\phi(x)$ est l'origine.

Soient ϕ et ψ deux cartes de X de domaines respectifs U et V. On appelle *changement de cartes de* ϕ *dans* ψ l'homéomorphisme γ de $\phi(U \cap V)$ dans $\psi(U \cap V)$ défini par

$$\gamma(x) = \psi(\phi^{-1}(x)) .$$

On dit que ϕ et ψ sont *compatibles* si γ est un difféomorphisme (i.e. si γ et γ^{-1} sont indéfiniment dérivables).

On appelle *atlas de* X tout ensemble de cartes deux à deux compatibles dont les domaines recouvrent X. On dit que deux atlas sont *compatibles* si leur réunion est un atlas. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures différentielles de* X.

On appelle *variété différentielle* toute variété topologique munie d'une structure différentielle.

Soit X une variété différentielle.

On appelle (abusivement) *atlas de* X tout atlas appartenant à la structure différentielle de X et *carte de* X toute carte appartenant à un atlas de X.

Soit x un point de X. Toutes les cartes de X dont le domaine contient x prennent leurs valeurs dans le même espace numérique. La dimension de cet espace s'appelle la *dimension de* X *au point* x et se désigne par $\dim_x (X)$. La fonction $\dim (X)$ est localement constante. On dit que X est de *dimension pure* si elle est constante.

On appelle *courbe différentielle* (resp. *surface différentielle*) toute variété différentielle de dimension pure 1 (resp. 2).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$ et soit f une application de X dans E. Pour toute carte ϕ de domaine U dans X, l'application f_ϕ de $\phi (U)$ dans E définie par

$$f_\phi(x) = f(\phi^{-1}(x))$$

s'appelle l'*expression de* f *dans* ϕ. Si ψ est une deuxième carte de domaine V et si γ désigne le changement de cartes de ϕ dans ψ, on a

$$f_\phi(x) = f_\psi(\gamma(x))$$

pour tout point x de $\phi (U \cap V)$.

Soit k un entier naturel (ou le symbole ∞). On dit que f est *k-fois continûment dérivable* s'il en est ainsi de son expression dans toute carte de X (ou ce qui revient au même dans toute carte d'un atlas de X). On désigne par $\mathscr{C}^k (X, E)$ l'ensemble de ces applications.

Remarquons que $\mathscr{C}^k (X, \mathbf{R})$ est une sous-algèbre de $\mathscr{F} (X, \mathbf{R})$ et $\mathscr{C}^k (X, E)$ un sous-$\mathscr{C}^k (X, \mathbf{R})$-module de $\mathscr{F} (X, E)$, en désignant par $\mathscr{F} (X, E)$ l'ensemble de toutes les applications de X dans E.

Si X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$, on munit l'ensemble $\mathscr{C}^k (X, E)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes des dérivées jusqu'à l'ordre k. C'est un espace de Fréchet.

Dans le cas général, l'expression dans une carte ϕ de domaine U induit une application linéaire de $\mathscr{C}^k (X, E)$ dans $\mathscr{C}^k (\phi (U), E)$ et l'on munit

$\mathscr{C}^k(X, E)$ de la topologie la moins fine rendant ces applications continues. C'est un espace localement convexe et complet. C'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

Pour tout ensemble compact K de X, l'ensemble $\mathscr{C}_K^k(X, E)$ des fonctions dont le support est contenu dans K est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}^k(X, E)$.

L'ensemble $\mathscr{C}_c^k(X, E)$ des fonctions de $\mathscr{C}^k(X, E)$ à support compact est un espace localement convexe et complet pour la topologie vectorielle limite inductive des espaces $\mathscr{C}_K^k(X, E)$.

Soient X et Y deux variétés différentielles et soit u une application continue de X dans Y.

Désignons par ϕ une carte de domaine U dans X et par ψ une carte de domaine V dans Y. On appelle *expression de* u *dans* (ϕ, ψ) l'application

$$u_{\psi\phi} : \phi\left(U \cap u^{-1}(V)\right) \to \psi(V)$$

définie par

$$u_{\psi\phi}(x) = \psi\left(u\left(\phi^{-1}(x)\right)\right).$$

On dit que u est *k-fois continûment dérivable* s'il en est ainsi de son expression dans tout couple de cartes. On désigne par $\mathscr{C}^k(X, Y)$ l'ensemble de ces applications.

On dit que l'application u est un *isomorphisme* (ou un *difféomorphisme*) si elle est bijective et si u et u^{-1} sont indéfiniment dérivables.

Les variétés différentielles, les applications indéfiniment dérivables et leur composition usuelle forment une catégorie.

Lemme 2. *Soient* X *et* Y *deux variétés différentielles. Pour qu'une application continue* u *de* X *dans* Y *soit indéfiniment dérivable, il faut et il suffit que l'application* u^* *de* $\mathscr{F}(Y, \mathbf{R})$ *dans* $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$ *définie par*

$$u^*(f) = f \cdot u$$

envoie $\mathscr{C}^\infty(Y, \mathbf{R})$ *dans* $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$.

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soient ϕ une carte de domaine U dans X et ψ une carte de domaine V contenant $u(U)$ dans Y. On désigne par $\psi_1, \ldots, \psi_m$ les fonctions coordonnées de ψ et par $v_1, \ldots, v_m$ les fonctions coordonnées de $u_{\psi\phi}$. Pour tout point x de $\phi(U)$, il existe une fonction α de $\mathscr{C}_c^\infty(V, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de $u(\phi^{-1}(x))$ (appendice I, lemme 3). Les fonctions $u^*(\alpha\psi_1), \ldots, u^*(\alpha\psi_m)$ appartiennent à $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$. On conclut en remarquant que leur expression dans ϕ coïncide avec $v_1, \ldots, v_m$ au voisinage de x.

Exemple 1.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Tout isomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire de E sur $\mathbf{R}^n$ est une carte et deux telles cartes sont évidemment compatibles. Nous munirons toujours E de la structure différentielle correspondante.

Exemple 2.

On dit qu'un sous-espace Y d'une variété différentielle est une *sous-variété* s'il vérifie la condition suivante:

(SV) Pour tout point x de Y, il existe une carte ϕ de X centrée en x, de domaine U et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, et un entier naturel m au plus égal à n tels que

$$\phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap (\mathbf{R}^m \oplus 0).$$

Les cartes de la forme $\phi\,|_{U \cap Y}$ définissent une structure différentielle sur Y que l'on dit *induite par* X. Nous munirons toujours une sous-variété de la structure différentielle induite.

Notons que l'injection canonique de Y dans X est indéfiniment dérivable et que Y est un sous-espace localement fermé de X. Enfin tout ensemble ouvert de X est une sous-variété.

Exemple 3.

Soient X et Y deux variétés différentielles. Pour toute carte ϕ de X et toute carte ψ de Y, l'application $\phi \times \psi$ est une carte du produit $X \times Y$. Deux telles cartes sont évidemment compatibles. On munit toujours $X \times Y$ de la structure différentielle correspondante.

Les projections canoniques de $X \times Y$ dans chacun de ses facteurs sont indéfiniment dérivables. L'application diagonale induit un difféomorphisme de X sur une sous-variété fermée de $X \times X$.

Exemple 4.

Soient X et Y deux espaces topologiques séparés et soit u un homéomorphisme local de X dans Y.

Si Y est une variété topologique, il en est de même de chacune des composantes connexes de X (appendice II, théorème 1). De plus, pour toute structure différentielle de Y, il existe une structure différentielle de X et une seule faisant de u un difféomorphisme local.

Si u est surjective et si X est une variété topologique, il en est de même de Y. De plus, pour toute structure différentielle de X, il existe une structure différentielle de Y et une seule faisant de u un difféomorphisme local.

Exemple 5.

Pour tout entier naturel n, on désigne par $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ l'ensemble des droites issues de l'origine dans $\mathbf{R}^{n+1}$ et par π la projection de $\mathbf{R}^{n+1}\backslash 0$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ associant à tout point $(x_0, ..., x_n)$ la droite $(x_0 : ... : x_n)$ qu'il définit. Muni de la topologie quotient, l'espace $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est compact et connexe.

Pour tout entier j compris entre 0 et n, on pose

$$U_j = \{(x_0 : ... : x_n) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{R}) \mid x_j \neq 0\}.$$

L'application ϕ_j de U_j dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$\phi_j(x_0 : ... : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_j}, ..., \widehat{\frac{x_j}{x_j}}, ..., \frac{x_n}{x_j}\right)$$

est une carte de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. On vérifie aisément que ces cartes sont deux à deux compatibles. Muni de la structure différentielle correspondante, l'ensemble $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ s'appelle l'*espace projectif réel de dimension* n.

Soient X et Y deux variétés différentielles de dimension pure n et m respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de X dans Y.

Pour tout point x de X, le rang à l'origine de l'application $u_{\psi\phi}$ est indépendant de la carte ϕ centrée en x et de la carte ψ centrée en $u(x)$. On l'appelle le *rang de* u *au point* x et on le désigne par $rg_x(u)$.

On dit que x est un *point régulier* (resp. un *point critique*) *de* u si $rg_x(u)$ est égal à m (resp. strictement inférieur à m). On dit qu'un point y de Y est une *valeur régulière* (resp. une *valeur critique*) *de* u si tous les points de $u^{-1}(y)$ sont réguliers (resp. s'il existe un point critique dans $u^{-1}(y)$).

Les deux théorèmes suivants sont des conséquences immédiates des versions locales correspondantes (appendice I, théorèmes 1 et 4).

THÉORÈME 1 (Fonctions réciproques). *Supposons* n *égal à* m. *Si l'application* u *est de rang* n *en un point* x *de* X, *elle induit un isomorphisme d'un voisinage de* x *sur un voisinage de* $u(x)$.

THÉORÈME 2 (Sard). *Si* X *est dénombrable à l'infini, l'ensemble des valeurs critiques de* u *n'a pas de point intérieur. Si* y *est une valeur régulière de* u, *alors* $u^{-1}(y)$ *est une sous-variété de dimension* $n-m$ *dans* X.

Remarque 1.

En fait, l'ensemble des valeurs critiques de u est de mesure nulle. C'est une conséquence immédiate de la définition donnée au paragraphe 4 et du théorême de Sard donné dans l'appendice I.

Lemme 3. *Soit* X *une variété différentielle et soient* x *et* y *des points de* X. *Pour tout voisinage connexe* V *de* $\{x, y\}$, *il existe un difféomorphisme* u *de* X *sur elle-même tel que*

$$u(x) = y \qquad et \qquad u|_{X \setminus V} = 1_{X \setminus V} .$$

En particulier, si X *est connexe, le groupe des difféomorphismes opère transitivement sur* X.

Il existe une famille $(\phi_j)_{0 \leq j \leq k}$ de cartes de X vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout entier j compris entre 0 et k, la carte ϕ_j est centrée au point x_j, son domaine U_j est contenu dans V et l'ensemble $\phi_j(U_j)$ est un cube de $\mathbf{R}^n$.

(2) Le point x_0 coïncide avec x, le point x_k coïncide avec y et pour tout entier j compris entre 0 et $k-1$, le point x_{j+1} appartient à U_j.

Il existe alors un difféomorphisme u_j de X sur elle-même tel que

$$u_j(x_j) = x_{j+1} \qquad\qquad u_j|_{X \setminus V} = 1_{X \setminus V}$$

(appendice I, lemme 4). Il suffit de poser

$$u = u_{k-1} \cdot \ldots \cdot u_0 .$$

Soit X une variété différentielle et soit $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de X. On appelle *partition de l'unité subordonnée à* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ toute famille $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ de fonctions indéfiniment dérivables à valeurs réelles positives sur X vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout indice ι, le support de α_ι est contenu dans U_ι.

(2) La famille des supports des α_ι est localement finie.

(3) Pour tout point x de X, la somme des $\alpha_\iota(x)$ (qui existe d'après (2)) est égale à 1.

Proposition 1. *Pour tout recouvrement ouvert* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ *de* X, *il existe une partition de l'unité* $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ *subordonnée à* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ [1]).

Il existe deux recouvrements ouverts $(V_\kappa)_{\kappa \in K}$ et $(W_\kappa)_{\kappa \in K}$ localement finis et plus fins que $(U_\iota)_{\iota \in I}$ tels que V_κ soit un domaine de carte relativement compact dans X et W_κ un ensemble relativement compact dans V_κ ([1], chap. IX, § 4, théorème 3).

[1]) C'est ici la première fois que nous utilisons l'hypothèse de paracompacité que nous avons faite sur les variétés.

Désignons par β_κ une fonction indéfiniment dérivable à valeurs réelles positives sur X dont le support est contenu dans V_κ et égale à 1 sur W_κ (appendice I, lemme 3).

Il suffit alors de poser

$$\alpha_\iota = \Big(\sum_{\tau(\kappa)=\iota} \beta_\kappa\Big)\Big(\sum_{\kappa\in K}\beta_\kappa\Big)^{-1}$$

où τ désigne une application de raffinement de K dans I.

COROLLAIRE. *Pour tout ensemble compact* K *de* X *et tout voisinage* U *de* K, *il existe une fonction* α *de* $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})$ *dont le support est contenu dans* U *et égale à 1 sur* K.

On dit qu'un atlas d'une variété différentielle est *orienté* si le jacobien des changements de cartes est positif. Deux atlas orientés sont dits *compatibles* si leur réunion est un atlas orienté. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *orientations de* X.

On dit qu'une variété différentielle est *orientable* si elle possède un atlas orienté. On dit qu'une variété différentielle est *orientée* si elle est orientable et munie d'une orientation.

Soit X une variété différentielle orientée. On appelle (abusivement) *atlas orienté de* X tout atlas appartenant à l'orientation de X et *carte orientée de* X toute carte appartenant à un atlas orienté de X.

LEMME 4. *Toute variété différentielle* X *orientable, connexe de dimension strictement positive possède exactement deux orientations.*

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux atlas orientés de X. Désignons par ϕ une carte de $\mathscr{A}$ et par ψ une carte de $\mathscr{B}$. Le signe du jacobien du changement de cartes de ϕ dans ψ est indépendant de ces cartes. Comme c'est une fonction localement constante, on voit que X possède au plus deux orientations.

D'autre part, l'ensemble des cartes de la forme $(-\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$ où ϕ parcourt $\mathscr{A}$ est un atlas orienté de X non compatible avec $\mathscr{A}$ ce qui démontre l'assertion.

Remarque 2.

Toute variété différentielle connexe de dimension 0 est réduite à un point. Elle est évidemment orientable. Par convention, on dit qu'elle possède deux orientations notées 1 et -1.