§ 2. Fibrés vectoriels

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

§ 2. Fibrés vectoriels

Dans tout ce paragraphe, on désigne par **k** le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on désigne par $M(p, q; \mathbf{k})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes (à coefficients dans **k**), par $M(p; \mathbf{k})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p et par $G(p; \mathbf{k})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre p.

Rappelons que l'ensemble $G(p; \mathbf{k})$ est ouvert dans l'espace vectoriel $M(p; \mathbf{k})$ et que le passage à l'inverse est un difféomorphisme.

Soit X une variété différentielle et soit π une application de but X.

On appelle *carte réelle* (resp. *complexe*) de π toute bijection Φ de $\pi^{-1}(U)$ sur $U \times \mathbf{R}^p$ (resp. $U \times \mathbf{C}^p$), où U est un ensemble ouvert de X appelé (abusivement) le *domaine de* Φ, vérifiant la relation

$$pr_1 \cdot \Phi = \pi|_{\pi^{-1}(U)} .$$

Pour tout point x de U, on désigne par Φ_x la bijection de la fibre π_x de π au point x sur $\mathbf{R}^p$ (resp. $\mathbf{C}^p$) définie par

$$\Phi_x(y) = (pr_2 \cdot \Phi)(y) .$$

Soient Φ et Ψ deux cartes réelles (resp. complexes) de π de domaines respectifs U et V. On dit que Φ et Ψ sont *compatibles* si pour tout point x de $U \cap V$ la bijection $\Psi_x \cdot \Phi_x^{-1}$ est linéaire et si l'application g de $U \cap V$ dans $M(p; \mathbf{R})$ (resp. $M(p; \mathbf{C})$) définie par

$$g(x) = \Psi_x \cdot \Phi_x^{-1}$$

est indéfiniment dérivable. Cette application s'appelle la *transition de* Φ *dans* Ψ.

On appelle *atlas réel* (resp. *complexe*) *de* π tout ensemble de cartes deux à deux compatibles dont les domaines recouvrent X. On dit que deux atlas sont *compatibles* si leur réunion est un atlas. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures vectorielles réelles* (resp. *complexes*) *de* π.

On appelle *fibré vectoriel réel* (resp. *complexe*) *sur* X toute application de but X munie d'une structure vectorielle réelle (resp. complexe).

Soit π un fibré vectoriel (réel ou complexe) sur X.

On appelle (abusivement) *atlas de* π tout atlas appartenant à la structure vectorielle de π et *carte de* π toute carte appartenant à un atlas de π.

La fibre de π en un point x est naturellement munie d'une structure d'espace vectoriel qui fait de Φ_x un isomorphisme pour toute carte Φ dont le domaine contient x. La dimension de cet espace vectoriel s'appelle (malheureusement) le *rang de* π *au point* x et se désigne par $rg_x(\pi)$. La fonction $rg(\pi)$ est localement constante. On dit que π est de *rang pur* si elle est constante.

On appelle *fibré en droites* tout fibré vectoriel de rang pur 1.

Désignons par $\tau(\pi)$ la source de π. Pour toute carte ϕ de X et toute carte Φ de π ayant même domaine, l'application $(\phi\cdot\pi, pr_2\cdot\Phi)$ est une carte de $\tau(\pi)$. On vérifie aisément que deux telles cartes sont compatibles et l'on munit $\tau(\pi)$ de la structure différentielle correspondante. L'application π est indéfiniment dérivable, son rang est égal à la dimension de X (on prendra garde de ne pas confondre le rang du fibré vectoriel π avec le rang de l'application π).

On appelle *section de* π toute application s de X dans $\tau(\pi)$ telle que

$$\pi \cdot s = 1_X .$$

Pour toute carte Φ de domaine U, l'application s_Φ définie sur U par

$$s_\Phi(x) = \Phi_x\big(s(x)\big)$$

s'appelle l'*expression de* s *dans* Φ. Si Ψ est une deuxième carte de domaine V et si g désigne la transition de Φ dans Ψ, on a

$$s_\Psi(x) = g(x)\big(s_\Phi(x)\big)$$

pour tout point x de $U \cap V$.

Soit k un entier naturel (ou le symbole ∞). On dit que s est *k-fois continûment dérivable* s'il en est ainsi de son expression dans toute carte de π (ou ce qui revient au même dans toute carte d'un atlas de π ou encore si elle appartient à $\mathscr{C}^k\big(X, \tau(\pi)\big)$). On désigne par $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ l'ensemble de ces sections.

Remarquons que l'ensemble $\mathscr{F}(X, \pi)$ de toutes les sections de π est naturellement muni d'une structure de $\mathscr{F}(X, \mathbf{k})$-module et que $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ en est un sous-$\mathscr{C}^k(X, \mathbf{k})$-module.

L'expression dans une carte Φ de domaine U induit une application linéaire de $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ dans $\mathscr{C}^k(U, \mathbf{k}^p)$ et l'on munit $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ de la topologie la moins fine rendant ces applications continues. C'est un espace localement convexe et complet. C'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

Pour tout ensemble compact K de X, l'ensemble $\mathscr{C}_K^k(X, \pi)$ des sections dont le support [1]) est contenu dans K est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}^k(X, \pi)$.

L'ensemble $\mathscr{C}_c^k(X, \pi)$ des sections de $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ à support compact est un espace localement convexe et complet pour la topologie vectorielle limite inductive des espaces $\mathscr{C}_K^k(X, \pi)$.

Lemme 1. *On désigne par* $(U_\iota)_{\iota\in I}$ *un recouvrement ouvert de* X *et, pour tout couple* (ι, κ) *d'indices, par* $s_{\kappa\iota}$ *une section de* $\mathscr{C}^k(U_\iota \cap U_\kappa, \pi)$. *On suppose que l'on a*

$$s_{\kappa\lambda} - s_{\iota\lambda} + s_{\iota\kappa} = 0$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda$. *Il existe alors pour tout indice* ι *une section* s_ι *de* $\mathscr{C}^k(U_\iota, \pi)$ *telle que l'on ait*

$$s_{\kappa\iota} = s_\iota - s_\kappa$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa$.

Désignons par $(\alpha_\iota)_{\iota\in I}$ une partition de l'unité subordonnée à $(U_\iota)_{\iota\in I}$ (§ 1, proposition 1). La section $t_{\kappa\iota}$ obtenue en prolongeant par 0 la section $\alpha_\kappa s_{\kappa\iota}$ appartient à $\mathscr{C}^k(U_\iota, \pi)$ et l'on pose

$$s_\iota = \sum_{\kappa\in I\setminus\{\iota\}} t_{\kappa\iota} .$$

On vérifie aisément que ces sections ont toutes les propriétés requises.

Soient π et ρ deux fibrés vectoriels (réels ou complexes) sur X et soit u une application de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\rho)$. On suppose que l'on a

$$\rho \cdot u = \pi$$

et que l'application u_x de π_x dans ρ_x induite par u est linéaire pour tout point x de X.

Désignons par Φ et Ψ des cartes de π et ρ à valeurs dans $U \times \mathbf{k}^p$ et $U \times \mathbf{k}^r$ respectivement. On appelle *expression de* u *dans* (Φ, Ψ) l'application $u_{\Psi\Phi}$ de U dans $M(r, p; \mathbf{k})$ définie par

$$u_{\Psi\Phi}(x) = \Psi_x \cdot u_x \cdot \Phi_x^{-1} .$$

On dit que l'application u est un *morphisme* si elle vérifie les conditions ci-dessus et si son expression dans tout couple de cartes est indéfiniment dérivable (ou ce qui revient au même si c'est une application indéfiniment dérivable de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\rho)$). On désigne par $\mathscr{C}^\infty(\pi, \rho)$ l'ensemble des morphismes de π dans ρ. C'est de manière naturelle un $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{k})$-module.

[1]) On appelle *support* d'une section continue le plus petit ensemble fermé en dehors duquel elle est nulle.

Les fibrés vectoriels sur X et leurs morphismes s'organisent de manière évidente en une catégorie.

Lemme 2. *Pour qu'un morphisme de* π *dans* ρ *soit un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il soit bijectif.*

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Si u est bijective, on a

$$(u^{-1})_{\Phi\Psi}(x) = \Phi_x \cdot (u^{-1})_x \cdot \Psi_x^{-1} = \big(u_{\Psi\Phi}(x)\big)^{-1}$$

et par conséquent $(u^{-1})_{\Phi\Psi}$ est indéfiniment dérivable.

Exemple 1.

On appelle *fibré vectoriel produit de rang* p *sur* X et l'on désigne par $\mathbf{k}_X^p$ l'application pr_1 de $X \times \mathbf{k}^p$ dans X munie de la structure vectorielle dont un atlas est réduit à l'application identique de $X \times \mathbf{k}^p$. On dit qu'un fibré vectoriel π sur X est *trivial* s'il est isomorphe à un fibré produit $\mathbf{k}_X^p$. Il revient au même de dire qu'il existe p sections de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ qui engendrent la fibre en tout point.

Exemple 2.

Soit π un fibré vectoriel sur X. Pour toute sous-variété Y de X, l'application $\pi\,|_{\pi^{-1}(Y)}$ est naturellement munie d'une structure vectorielle. Le fibré vectoriel correspondant se désigne par $\pi\,|_Y$.

Exemple 3.

Soit π un fibré vectoriel sur X. On dit que la restriction ρ de π à une partie de $\tau(\pi)$ est un *sous-fibré* si elle vérifie la condition suivante:

(SF) Pour tout point x de X, il existe une carte Φ de π à valeurs dans $U \times \mathbf{k}^p$ dont le domaine contient x et un entier naturel r au plus égal à p tel que

$$\Phi\big(\rho^{-1}(U)\big) = U \times (\mathbf{k}^r \oplus 0)\,.$$

Les cartes de la forme $(1_U \times pr_1) \cdot \Phi$ définissent une structure vectorielle sur ρ que l'on dit *induite par* π. Nous munirons toujours un sous-fibré de la structure vectorielle induite.

Notons que $\tau(\rho)$ est une sous-variété fermée de $\tau(\pi)$ et que l'injection canonique est un morphisme.

La relation

$$\text{« } \pi(y') = \pi(y'') \quad \text{et} \quad y' - y'' \in \tau(\rho) \text{ »}$$

est une relation d'équivalence sur $\tau(\pi)$. On désigne par σ l'application déduite de π par passage au quotient. On vérifie aisément que les applications de la forme

$$(1_U \times pr_2) \cdot \Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{k}^{p-r}$$

où Φ vérifie (SF) induisent par passage au quotient des cartes de σ deux à deux compatibles. Munie de la structure vectorielle correspondante, l'application σ s'appelle le *fibré quotient de* π *par* ρ. Notons que la projection canonique de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\sigma)$ est un morphisme.

Soient π et ρ deux fibrés vectoriels sur X.

On désigne par Φ et Φ' (resp. Ψ et Ψ') des cartes de π (resp. ρ) de domaines respectifs U et U' et par g (resp. h) la transition de Φ dans Φ' (resp. de Ψ dans Ψ').

Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \pi_x \oplus \rho_x$ dans X d'une structure vectorielle. On définit des cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, y) = \big(x, (\Phi_x \oplus \Psi_x)(y)\big) \quad \text{et} \quad \Lambda'(x, y) = \big(x, (\Phi'_x \oplus \Psi'_x)(y)\big).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par la formule

$$f(x) = g(x) \oplus h(x).$$

Ces cartes sont donc compatibles. Le fibré vectoriel correspondant s'appelle la *somme directe de* π *et* ρ et se désigne par $\pi \oplus \rho$.

En particulier, pour tout entier naturel q, on désigne par π^q le fibré vectoriel somme directe de q exemplaires de π.

Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \pi_x \otimes \rho_x$ dans X d'une structure vectorielle. On définit des cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, y) = \big(x, (\Phi_x \otimes \Psi_x)(y)\big) \quad \text{et} \quad \Lambda'(x, y) = \big(x, (\Phi'_x \otimes \Psi'_x)(y)\big).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par la formule

$$f(x) = g(x) \otimes h(x).$$

Ces cartes sont donc compatibles. Le fibré vectoriel correspondant s'appelle le *produit tensoriel de* π *et* ρ et se désigne par $\pi \otimes \rho$.

Supposons π de rang p. Pour tout entier j compris entre 1 et p, on désigne par e_j le j^e vecteur de base dans $\mathbf{k}^p$ et par t_j (resp. t'_j) la section de π sur U (resp. U') définie par

$$t_j(x) = \Phi_x^{-1}(e_j) \qquad (\text{resp. } t'_j(x) = \Phi'^{-1}_x(e_j)).$$

Pour tout point x de $U \cap U'$, on a

$$t_j(x) = \sum_{1 \leq k \leq p} g_{kj}(x)\, t'_k(x)$$

où les g_{kj} désignent les coefficients de la matrice g. D'autre part, la restriction à U (resp. U') de toute section s de $\pi \otimes \rho$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$s \mid_U = \sum_{1 \leq j \leq p} t_j \otimes u_j \qquad (\text{resp} \quad s \mid_{U'} = \sum_{1 \leq j \leq p} t'_j \otimes u'_j)$$

où les u_j (resp. u'_j) sont des sections de ρ sur U (resp. U'). Un calcul élémentaire montre que ces sections sont liées par les relations

$$u'_j = \sum_{1 \leq k \leq p} g_{jk} u_k .$$

Désignons par σ un troisième fibré vectoriel sur X et par δ un morphisme de $\pi \otimes \rho$ dans σ. Pour toute section u de π et toute section v de ρ, on définit une section $\delta(u, v)$ de σ en posant

$$\delta(u, v)(x) = \delta\big(u(x) \otimes v(x)\big).$$

On définit ainsi une application bilinéaire de $\mathscr{F}(X, \pi) \times \mathscr{F}(X, \rho)$ dans $\mathscr{F}(X, \sigma)$. De plus, on vérifie aisément que si u est une section de $\mathscr{C}^k(X, \pi)$ et v une section de $\mathscr{C}^k(X, \rho)$, alors $\delta(u, v)$ est une section de $\mathscr{C}^k(X, \sigma)$.

On dit que δ est une *dualité* si pour tout point x de X, l'application bilinéaire de $\pi_x \times \rho_x$ dans σ_x déduite de δ_x induit des isomorphismes de π_x sur Hom (ρ_x, σ_x) et de ρ_x sur Hom (π_x, σ_x).

Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \pi_x^*$ [1]) dans X d'une structure vectorielle. On définit des cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, y) = (x, y \cdot \Phi_x^{-1}) \qquad \text{et} \qquad \Lambda'(x, y) = (x, y \cdot \Phi'^{-1}_x).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par la formule

$$f(x) = {}^t g(x)^{-1}.$$

Ces cartes sont donc compatibles. Le fibré vectoriel correspondant s'appelle le *dual de* π et se désigne par π^*.

On construit de la même manière des fibrés vectoriels $\Lambda^q \pi$ et $\Lambda \pi$.

---

[1]) Pour tout espace vectoriel E sur **k**, on désigne par E^* l'espace dual de E, i.e. l'espace des applications linéaires de E dans **k**.

Soit E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbf{k}$. On appelle *forme hermitienne sur* E toute application α de $E \times E$ dans $\mathbf{k}$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout vecteur t de E, l'application partielle $\alpha(\ \ , t)$ est $\mathbf{k}$-linéaire.

(2) Pour tout couple (t', t'') de vecteurs de E, on a

$$\alpha(t', t'') = \overline{\alpha(t'', t')}\,.$$

Si $\mathbf{k}$ est égal à $\mathbf{R}$, une forme hermitienne est donc une forme bilinéaire symétrique. On désigne par Herm (E) l'espace vectoriel (réel) des formes hermitiennes sur E. Sa dimension est égale à $\dfrac{p(p+1)}{2}$ si $\mathbf{k}$ est égal à $\mathbf{R}$, à p^2 si $\mathbf{k}$ est égal à $\mathbf{C}$. Les formes hermitiennes sur $\mathbf{k}^p$ s'identifient de manière naturelle à des matrices de $M(p; \mathbf{k})$.

On dit qu'une forme hermitienne est *positive* (resp. *positive non dégénérée*) si le nombre réel $\alpha(t, t)$ est positif (resp. strictement positif) pour tout vecteur t non nul.

Reprenons le cours de notre histoire. Nous allons munir la projection canonique de $\coprod_{x \in X}$ Herm (π_x) dans X d'une structure vectorielle. On définit deux cartes Λ et Λ' de domaines respectifs U et U' en posant

$$\Lambda(x, \alpha) = \left(x, \alpha \cdot (\Phi_x^{-1} \times \Phi_x^{-1})\right) \quad \text{et} \quad \Lambda'(x, \alpha) = \left(x, \alpha \cdot (\Phi_x'^{-1} \times \Phi_x'^{-1})\right).$$

La transition de Λ dans Λ' est donnée par le produit de matrices

$$f(x) = {}^t\overline{g(x)}^{-1}\,\alpha\, g(x)^{-1}$$

pour tout point x de $U \cap U'$ et toute forme hermitienne α sur $\mathbf{k}^p$. En particulier, ces cartes sont compatibles. Le fibré vectoriel réel correspondant se désigne par Herm (π).

On appelle *métrique hermitienne sur* π toute section de $\mathscr{C}^\infty\left(X, \text{Herm}(\pi)\right)$ qui induit une forme hermitienne positive non dégénérée sur toutes les fibres.

Désignons par α une métrique hermitienne sur π.

Pour toute section s de π, on définit une fonction $|s|$ à valeurs réelles positives sur X en posant

$$|s|(x) = \left(\alpha(x)\left(s(x), s(x)\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit aussi une application u de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\pi^*)$ en posant

$$u(x, y) = \left(x, \alpha(\ \ , y)\right).$$

On vérifie aisément que u est un isomorphisme de fibrés vectoriels réels qui permet d'identifier π à son dual π^*.

LEMME 3. *Tout fibré vectoriel π sur X possède une métrique hermitienne.*

L'assertion est évidente si π est trivial. Sinon, on désigne par $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de X formé de domaines de cartes de π et par $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Pour tout indice ι, il existe une métrique hermitienne α_ι sur $\pi \,|_{U_\iota}$ et l'on pose

$$\alpha = \sum_{\iota \in I} \lambda_\iota \alpha_\iota$$

On vérifie aisément que α est une métrique hermitienne sur π.

Désignons par X une variété différentielle, par p un entier naturel et par $\mathcal{U} = (U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de X. On appelle *cocycle réel* (resp. *complexe*) *de rang* p *subordonné à* $\mathcal{U}$ toute famille $(g_{\kappa\iota})_{(\iota,\kappa) \in I \times I}$, où $g_{\kappa\iota}$ est une application indéfiniment dérivable de $U_\iota \cap U_\kappa$ dans $G(p; \mathbf{R})$ (resp. $G(p; \mathbf{C})$) vérifiant la relation

$$g_{\lambda\iota} = g_{\lambda\kappa} g_{\kappa\iota}$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda$.

On dit que deux tels cocycles $(g_{\kappa\iota})$ et $(h_{\kappa\iota})$ sont *cobordants* s'il existe une famille (f_ι), où f_ι est une application indéfiniment dérivable de U_ι dans $G(p; \mathbf{k})$ vérifiant la relation

$$f_\kappa = h_{\kappa\iota} f_\iota \, g_{\iota\kappa}$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa$.

Cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des cocycles de rang p subordonnés à $\mathcal{U}$. L'ensemble quotient se désigne par $\mathrm{Pic}\,(\mathcal{U}, G(p; \mathbf{k}))$.

Soit $\mathcal{V} = (V_\kappa)_{\kappa \in K}$ un second recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathcal{U}$ et soit τ une application de raffinement de K dans I. Pour tout cocycle $g = (g_{\kappa\iota})$ de rang p subordonné à $\mathcal{U}$, on définit un cocycle $\tau^*(g)$ de rang p subordonné à $\mathcal{V}$ en posant

$$\tau^*(g)_{\kappa\iota} = g_{\tau(\kappa)\tau(\iota)} \,|\, V_\iota \cap V_\kappa \,.$$

L'application τ^* est compatible avec la relation de cobordance. De plus, si τ' est une autre application de raffinement, on a

$$g_{\tau'(\kappa)\tau(\kappa)} = g_{\tau'(\kappa)\tau'(\iota)}\, g_{\tau'(\iota)\tau(\iota)}\, g_{\tau(\iota)\tau(\kappa)} \,.$$

Ceci montre que l'application de $\mathrm{Pic}\,(\mathcal{U}, G(p; \mathbf{k}))$ dans $\mathrm{Pic}\,(\mathcal{V}, G(p; \mathbf{k}))$ déduite de τ^* par passage aux quotients est indépendante de τ. On la désigne par $\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U})$.

Si $\mathscr{W}$ est un recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathscr{V}$, on a

$$\sigma(\mathscr{W}, \mathscr{V}) \cdot \sigma(\mathscr{V}, \mathscr{U}) = \sigma(\mathscr{W}, \mathscr{U}) .$$

En particulier, si $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ sont équivalents (i.e. si chacun d'eux est plus fin que l'autre), les applications $\sigma(\mathscr{U}, \mathscr{V})$ et $\sigma(\mathscr{V}, \mathscr{U})$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

On fixe une fois pour toutes un système cofinal de recouvrements ouverts de X et l'on désigne par $\mathrm{Pic}\,(X, G(p; \mathbf{k}))$ la limite inductive des ensembles $\mathrm{Pic}\,(\mathscr{U}, G(p; \mathbf{k}))$ et des applications $\sigma(\mathscr{V}, \mathscr{U})$ lorsque $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ parcourent ce système. Les éléments de $\mathrm{Pic}\,(X, G(p; \mathbf{k}))$ s'appellent les *fibrés principaux de groupe structural* $G(p; \mathbf{k})$ *sur* X.

Soit π (resp. ρ) un fibré vectoriel de rang pur p (resp. r) sur X et soit $(\Phi_\iota)_{\iota \in I}$ (resp. $(\Psi_\iota)_{\iota \in I}$) un atlas de π (resp. ρ). On suppose que Φ_ι et Ψ_ι ont même domaine U_ι et l'on désigne par $g_{\kappa\iota}$ (resp. $h_{\kappa\iota}$) la transition de Φ_ι dans Φ_κ (resp. de Ψ_ι dans Ψ_κ). L'expression dans (Φ_ι, Ψ_ι) d'un morphisme u de π dans ρ est une application indéfiniment dérivable u_ι de U_ι dans $M(r, p; \mathbf{k})$ et l'on a

$$u_\kappa = h_{\kappa\iota} u_\iota \, g_{\iota\kappa} .$$

En particulier, on voit que π et ρ sont isomorphes si et seulement si les cocycles $(g_{\kappa\iota})$ et $(h_{\kappa\iota})$ sont cobordants. On en déduit que l'image $\delta(\pi)$ de $(g_{\kappa\iota})$ dans $\mathrm{Pic}\,(X, G(p; \mathbf{k}))$ ne dépend que de π (et non de l'atlas (Φ_ι)). On l'appelle le *fibré principal associé à* π.

Nous allons montrer que tout fibré principal de groupe structural $G(p; \mathbf{k})$ sur X est associé à un fibré vectoriel de rang pur p.

Soit $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert de X et soit $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle de rang p subordonné à ce recouvrement. Pour tout couple d'indices (ι, κ), on définit une bijection $\Phi_{\kappa\iota}$ de $(U_\iota \cap U_\kappa) \times \mathbf{k}^p$ sur lui-même en posant

$$\Phi_{\kappa\iota}(x, t) = (x, g_{\kappa\iota}(x)(t)) .$$

En tout point de $U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda$, on a

$$\Phi_{\lambda\iota} = \Phi_{\lambda\kappa} \cdot \Phi_{\kappa\iota} .$$

Désignons par Y l'ensemble obtenu par recollement des $U_\iota \times \mathbf{k}^p$ au moyen des applications $\Phi_{\kappa\iota}$ et par π l'application de Y dans X obtenue par recollement des premières projections. Pour tout indice ι, l'application canonique de $U_\iota \times \mathbf{k}^p$ dans $\pi^{-1}(U_\iota)$ est une bijection et la bijection réciproque Φ_ι est une carte de π. La transition de Φ_ι dans Φ_κ n'est autre que $g_{\kappa\iota}$ ce qui démontre l'assertion.

Scholie. *Les classes d'isomorphie de fibrés vectoriels réels (resp. complexes) de rang pur* p *sur* X *sont en correspondance biunivoque avec les fibrés principaux de groupe structural* $G(p; \mathbf{R})$ *(resp.* $G(p; \mathbf{C})$*) sur* X.

Le groupe $G(1; \mathbf{k})$ étant commutatif, on vérifie aisément que la multiplication point par point des applications induit une structure de groupe commutatif sur $\operatorname{Pic}(X, G(1; \mathbf{k}))$. Si π et ρ sont des fibrés en droites sur X, on a

$$\delta(\pi \otimes \rho) = \delta(\pi)\,\delta(\rho) \qquad \text{et} \qquad \delta(\pi^*) = \delta(\pi)^{-1} .$$

Soit ξ un fibré principal de groupe structural $\mathbf{C}^*$ sur X et soit $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle de rang 1 représentant ξ et subordonné à un recouvrement $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Il est clair que la classe de $(\overline{g_{\kappa\iota}})$ dans $\operatorname{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de ξ. On la désigne par $\bar{\xi}$.

Lemme 4. *Le fibré principal* $\bar{\xi}$ *est l'inverse du fibré principal* ξ.

Conservons les notations précédentes. Pour tout couple (ι, κ) d'indices, on désigne par $f_{\kappa\iota}$ le logarithme de la fonction $|g_{\kappa\iota}|^2$. Il existe pour tout indice ι une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{R})$ telle que

$$f_{\kappa\iota} = f_\iota - f_\kappa$$

sur $U_\iota \cap U_\kappa$ (lemme 1) et l'on pose

$$g_\iota = \exp(f_\iota) .$$

On a alors la relation

$$g_\iota = |g_{\kappa\iota}|^2 g_\kappa = g_{\iota\kappa}^{-1} g_\kappa \overline{g_{\kappa\iota}}$$

ce qui démontre l'assertion.

Soit X une variété différentielle de dimension pure n et soit π un fibré vectoriel de rang pur p sur X.

Désignons par Φ et Ψ deux cartes de π ayant pour domaine le même voisinage U d'un point x de X et par g la transition de Φ dans Ψ. Pour toute section s de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$, on a

$$s_\Psi = g \cdot s_\Phi .$$

On dit que s est *transverse (à la section nulle) au point* x si $s(x)$ est non nul ou si s_Φ est de rang p au point x. En vertu de ce qui précède, cette condition est indépendante de Φ. On dit que s est *transverse (à la section nulle)* si elle est transverse en tout point de X.

LEMME 5. *Les sections transverses de* π *forment une partie dense de* $\mathscr{C}^{\infty}(X, \pi)$.

Supposons X connexe; l'espace $\mathscr{C}^{\infty}(X, \pi)$ est alors un espace de Fréchet. Pour toute partie compacte K de X, on désigne par W_K l'ensemble des sections de $\mathscr{C}^{\infty}(X, \pi)$ qui sont transverses en tout point de K. En vertu du théorème de Baire ([1], chap. IX, § 5, n° 3, théorème 1), il suffit de montrer que W_K est ouvert et dense dans $\mathscr{C}^{\infty}(X, \pi)$. Pour ce faire, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ et que π est le fibré produit $\mathbf{R}_X^p$. Les sections de π s'identifient alors aux fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ et les sections transverses aux fonctions ayant l'origine pour valeur régulière.

Soit f une fonction de $\mathscr{C}^{\infty}(X, \mathbf{R}^p)$. Posons

$$g(x) = |f(x)| + \sum_j |A_j(f)(x)|$$

où les $A_j(f)$ désignent le déterminant des mineurs d'ordre p extraits de la matrice jacobienne de f. Pour que l'origine soit une valeur régulière de f, il faut et il suffit que g ne s'annule pas sur X. On en déduit aisément que W_K est ouvert. D'autre part, le théorème de Sard (appendice I, théorème 4) montre qu'en ajoutant à f un vecteur convenable, l'origine devient une valeur régulière, d'où l'assertion.

Remarque 1.

Si p est strictement supérieur à n, la même démonstration montre que le fibré π possède une section indéfiniment dérivable partout non nulle.

LEMME 6. *Soient* x_0 *et* x_1 *deux points de* X *et soit* s *une section de* $\mathscr{C}^{\infty}(X, \pi)$. *On suppose que* x_0 *est l'unique zéro de* s *dans un voisinage connexe* V *de* $\{x_0, x_1\}$. *Il existe alors une section* t *de* $\mathscr{C}^{\infty}(X, \pi)$ *qui coïncide avec* s *sur* $X \setminus V$ *et dont* x_1 *est l'unique zéro dans* V. *Si de plus* s *est transverse, on peut choisir* t *transverse.*

On se ramène aisément au cas où x_0 et x_1 sont contenus dans un ensemble ouvert connexe U lui-même relativement compact dans le domaine d'une carte Φ de π contenu dans V. Il existe un difféomorphisme u de X tel que

$$u(x_1) = x_0 \qquad\qquad u|_{X \setminus U} = 1_{X \setminus U}$$

(§ 1, lemme 3). On vérifie aisément que la section t définie par

$$\begin{aligned} t(x) &= s(x) && \text{si } x \in X \setminus U \\ t(x) &= (\Phi_x^{-1} \cdot \Phi_{u(x)})\big(s(u(x))\big) && \text{si } x \in U \end{aligned}$$

a toutes les propriétés requises.

THÉORÈME 1. *Soit* X *une variété différentielle de dimension pure* n *et soit* π *un fibré vectoriel de rang pur* n *sur* X. *On suppose que* X *est ouverte* [1]. *Il existe alors une section* s *de* $\mathscr{C}^{\infty}(X, \pi)$ *partout non nulle.*

On suppose X connexe et l'on désigne par $(K_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite exhaustive de parties compactes de X telles que $X \backslash K_j$ n'ait aucune composante connexe relativement compacte dans X (appendice II, lemme 6). On va construire par récurrence sur j une section transverse s_j de π qui coïncide avec s_{j-1} sur K_{j-1} et qui ne s'annule pas sur K_j. Ceci établira l'assertion. On suppose que K_0 est vide et l'on prend pour s_0 une section transverse quelconque de π (il en existe en vertu du lemme 5). Supposons s_j construite; on désigne par A l'ensemble de ses zéros (c'est un ensemble fermé et discret puisqu'elle est transverse et puisque le rang de π est égal à la dimension de X) et par $\{x_1, ..., x_p\}$ l'intersection de A et de K_{j+1}. Il existe un ensemble de points $\{y_1, ..., y_p\}$ deux à deux distincts dans $X \backslash (K_{j+1} \cup A)$ tel que x_k et y_k se trouvent dans la même composante connexe de $X \backslash K_j$.

Désignons par V_1 un voisinage connexe de $\{x_1, y_1\}$ dans $X \backslash K_j$ tel que x_1 soit le seul zéro de s_j dans V_1. Il existe une section transverse t_1 de π qui coïncide avec s_j sur $X \backslash V_1$ et dont le seul zéro dans V_1 soit y_1 (lemme 6). On construit de la même manière et par récurrence sur k un voisinage connexe V_k de $\{x_k, y_k\}$ dans $X \backslash K_j$ tel que x_k soit le seul zéro de t_{k-1} dans V_k et une section transverse t_k de π qui coïncide avec t_{k-1} sur $X \backslash V_k$ et dont le seul zéro dans V_k soit y_k. Il suffit alors de prendre pour s_{j+1} la section t_p.

COROLLAIRE. *Tout fibré vectoriel complexe de rang 1 sur une surface différentielle ouverte est trivial.*

Remarque 2.

Tout fibré vectoriel complexe π sur une surface différentielle ouverte est trivial: la démonstration se fait par récurrence sur le rang de π. Elle est laissée en exercice au lecteur (voir chap. V, § 4, théorème 6).

§ 3. CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une variété différentielle de dimension pure n.

---

[1] On dit qu'une variété est *ouverte* si aucune de ses composantes connexes n'est compacte.