§ 3. Calcul différentiel

THÉORÈME 1. *Soit* X *une variété différentielle de dimension pure* n *et soit* π *un fibré vectoriel de rang pur* n *sur* X. *On suppose que* X *est ouverte* [1]. *Il existe alors une section* s *de* $\mathscr{C}^{\infty}(X, \pi)$ *partout non nulle.*

On suppose X connexe et l'on désigne par $(K_j)_{j \in \mathrm{N}}$ une suite exhaustive de parties compactes de X telles que $X \backslash K_j$ n'ait aucune composante connexe relativement compacte dans X (appendice II, lemme 6). On va construire par récurrence sur j une section transverse s_j de π qui coïncide avec s_{j-1} sur K_{j-1} et qui ne s'annule pas sur K_j. Ceci établira l'assertion. On suppose que K_0 est vide et l'on prend pour s_0 une section transverse quelconque de π (il en existe en vertu du lemme 5). Supposons s_j construite; on désigne par A l'ensemble de ses zéros (c'est un ensemble fermé et discret puisqu'elle est transverse et puisque le rang de π est égal à la dimension de X) et par $\{x_1, ..., x_p\}$ l'intersection de A et de K_{j+1}. Il existe un ensemble de points $\{y_1, ..., y_p\}$ deux à deux distincts dans $X \backslash (K_{j+1} \cup A)$ tel que x_k et y_k se trouvent dans la même composante connexe de $X \backslash K_j$.

Désignons par V_1 un voisinage connexe de $\{x_1, y_1\}$ dans $X \backslash K_j$ tel que x_1 soit le seul zéro de s_j dans V_1. Il existe une section transverse t_1 de π qui coïncide avec s_j sur $X \backslash V_1$ et dont le seul zéro dans V_1 soit y_1 (lemme 6). On construit de la même manière et par récurrence sur k un voisinage connexe V_k de $\{x_k, y_k\}$ dans $X \backslash K_j$ tel que x_k soit le seul zéro de t_{k-1} dans V_k et une section transverse t_k de π qui coïncide avec t_{k-1} sur $X \backslash V_k$ et dont le seul zéro dans V_k soit y_k. Il suffit alors de prendre pour s_{j+1} la section t_p.

COROLLAIRE. *Tout fibré vectoriel complexe de rang 1 sur une surface différentielle ouverte est trivial.*

Remarque 2.

Tout fibré vectoriel complexe π sur une surface différentielle ouverte est trivial: la démonstration se fait par récurrence sur le rang de π. Elle est laissée en exercice au lecteur (voir chap. V, § 4, théorème 6).

§ 3. CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une variété différentielle de dimension pure n.

---

[1]) On dit qu'une variété est *ouverte* si aucune de ses composantes connexes n'est compacte.

Pour tout point x de X, l'algèbre A_x^k des germes en x de fonctions k-fois continûment dérivables à valeurs réelles possède un unique idéal maximal $\underline{m}(A_x^k)$, à savoir l'idéal des germes de fonctions qui s'annulent au point x.

Soient ϕ et ψ deux cartes de X dont les domaines contiennent x. On désigne par γ le changement de cartes de ϕ dans ψ. Pour toute fonction f continûment dérivable au voisinage de x, on a

$$Df_\phi(\phi(x)) = Df_\psi(\psi(x)) \cdot D\gamma(\phi(x)) .$$

En particulier, la condition

$$Df_\phi(\phi(x)) = 0$$

ne dépend que du germe de f au point x (et non de la carte ϕ).

Supposons k strictement positif. On dit qu'un germe de $\underline{m}(A_x^k)$ est *stationnaire* s'il vérifie cette condition. L'ensemble des germes stationnaires est un idéal $\underline{a}(A_x^k)$ de A_x^k et on a les inclusions

$$\underline{m}^2(A_x^k) \subset \underline{a}(A_x^k) \subset \underline{m}(A_x^k) .$$

Pour toute carte ϕ de X dont le domaine contient x, on désigne par $\varepsilon_{x,\phi}$ l'application linéaire de A_x^k dans $(\mathbf{R}^n)^*$ définie par

$$\varepsilon_{x,\phi}(f) = Df_\phi(\phi(x)) .$$

LEMME 1. *Par restriction et passage au quotient, l'application* $\varepsilon_{x,\phi}$ *induit un isomorphisme de* $\underline{m}(A_x^k)/\underline{a}(A_x^k)$ *sur* $(\mathbf{R}^n)^*$.

L'application induite est injective par définition même de $\underline{a}(A_x^k)$. D'autre part, pour toute forme linéaire α sur $\mathbf{R}^n$, le germe en x de la fonction

$$\alpha \cdot \phi - (\alpha \cdot \phi)(x)$$

a pour image α ce qui démontre l'assertion.

On appelle *espace cotangent à* X *au point* x et l'on désigne par Ω_x^1 l'espace vectoriel $\underline{m}(A_x^1)/\underline{a}(A_x^1)$. Il résulte du lemme 1 que Ω_x^1 est de dimension n et que l'injection canonique de A_x^k dans A_x^1 induit un isomorphisme de $\underline{m}(A_x^k)/\underline{a}(A_x^k)$ sur Ω_x^1 pour tout entier k strictement positif.

LEMME 2. *Il existe des germes* $u_1, \ldots, u_n$ *de* $\underline{m}(A_x^\infty)$ *tels que tout germe* f *de* $\underline{a}(A_x^k)$ *s'écrive*

$$f = \sum_{1 \leq j \leq n} f_j u_j$$

avec $f_1, \ldots, f_n$ *dans* $\underline{m}(A_x^{k-1})$.

En particulier, on a

$$\underline{a}(A_x^\infty) = \underline{m}^2(A_x^\infty).$$

La question étant locale, on peut supposer que X est un ensemble ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$. Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$ et tout point y de X, on a

$$f(y) - f(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} f_j(y)(y_j - x_j)$$

où l'on a posé

$$f_j(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(ty + (1-t)x)\,dt.$$

On en déduit aisément l'assertion.

On appelle *différentielle d'un germe* f *de* A_x^1 et l'on désigne par df la classe dans Ω_x^1 du germe $f - f(x)$.

LEMME 3. *L'application* d *de* A_x^1 *dans* Ω_x^1 *est linéaire et l'on a*

$$d(fg) = g(x)\,df + f(x)\,dg$$

pour tout couple (f, g) *d'éléments de* A_x^1.

La première assertion est évidente. La seconde résulte de la formule

$$\begin{aligned} fg - f(x)g(x) &= g(x)(f - f(x)) + f(x)(g - g(x)) \\ &\quad + (f - f(x))(g - g(x)). \end{aligned}$$

Soit ϕ une carte de domaine U dans X. On désigne par $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et par $\phi_1, \ldots, \phi_n$ les fonctions coordonnées de ϕ.

Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$, on définit des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial \phi_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial \phi_n}$ de $\mathscr{C}^{k-1}(U, \mathbf{R})$ en posant

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_j}(x) = \varepsilon_{x,\phi}(f_x)(e_j) = \frac{\partial f_\phi}{\partial x_j}(\phi(x)).$$

Remarquons que si X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ et si ϕ est l'injection canonique de X dans $\mathbf{R}^n$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial \phi_j}$ coïncide avec la dérivée partielle usuelle $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la règle de dérivation des fonctions composées.

LEMME 4. *Soient* ϕ *et* ψ *deux cartes de* X *et soit* f *une fonction de* $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{R})$. *On a*

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_j} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial f}{\partial \psi_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial \phi_j}.$$

LEMME 5. *Pour toute carte* ϕ *de* X *et pour tout point* x *du domaine de* ϕ, *les différentielles des germes* $\phi_{1,x}, \ldots, \phi_{n,x}$ *forment une base de* Ω^1_x. *Pour tout germe* f *de* A^1_x, *on a*

$$df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \phi_j}(x)\, d\phi_{j,x}.$$

C'est une conséquence immédiate des définitions et du lemme 1.

Soit π la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \Omega^1_x$ dans X et soient ϕ et ψ des cartes de domaines respectifs U et V dans X. Le lemme 1 montre que les applications

$$\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to U \times (\mathbf{R}^n)^* \quad \text{et} \quad \tilde{\psi} : \pi^{-1}(V) \to V \times (\mathbf{R}^n)^*$$

définies par

$$\tilde{\phi}(x, y) = \big(x, \varepsilon_{x,\phi}(y)\big) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}(x, y) = \big(x, \varepsilon_{x,\psi}(y)\big)$$

sont des cartes de π. Ces cartes sont compatibles, la transition est donnée par la formule

$$g(x) = {}^t D\gamma\big(\phi(x)\big)^{-1}$$

où γ désigne le changement de cartes de ϕ dans ψ.

Le fibré vectoriel réel de rang n ainsi défini s'appelle le *fibré cotangent à* X et se désigne par Ω^1 (ou $\Omega^1(X)$ s'il y a risque de confusion).

Pour tout entier r, on désigne par Ω^r le fibré vectoriel $\Lambda^r \Omega^1$ et par Ω le fibré vectoriel $\Lambda \Omega^1$.

On appelle *forme différentielle* toute section de Ω. La structure des fibres munit l'ensemble $\mathscr{F}(X, \Omega)$ de toutes les formes différentielles d'une structure de $\mathscr{F}(X, \mathbf{R})$-algèbre graduée. Notons que $\mathscr{C}^k(X, \Omega)$ en est une sous-$\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$-algèbre.

On dit qu'une forme différentielle est *homogène de degré* r si elle prend ses valeurs dans Ω^r.

On appelle *différentielle d'une fonction* f *de* $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{R})$ et l'on désigne par df la forme différentielle homogène de degré 1 définie par

$$df(x) = d(f_x).$$

Avec les notations précédentes, on a

$$(df)_{\phi}^{\sim} = Df_{\phi} \cdot \phi = \sum_{1 \leqq j \leqq n} \frac{\partial f}{\partial \phi_j} d\phi_j .$$

En particulier, si f appartient à $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$, alors df appartient à $\mathscr{C}^{k-1}(X, \Omega^1)$.

Il résulte du lemme 5 que la restriction à U de toute forme différentielle s homogène de degré r s'écrit d'une manière et d'une seule

$$s \mid_U = \sum_{J \in S_r(n)} u_J \, d\phi_J$$

où $S_r(n)$ désigne l'ensemble des suites strictement croissantes de r entiers compris entre 1 et n et où l'on a posé

$$d\phi_J = d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_r} \qquad J = (j_1, \ldots, j_r) .$$

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de ces définitions et de ce qui précède (§ 1, proposition 1, corollaire).

LEMME 6. *Pour tout point x de X, il existe un voisinage V de x et des fonctions $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ vérifiant la condition suivante : pour toute forme différentielle s de $\mathscr{C}^k(X, \Omega^r)$, il existe des fonctions s_J de $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{R})$ telles que*

$$s \mid_V = \sum_{J \in S_r(n)} s_J \, dv_J \mid_V .$$

THÉORÈME 1. *Il existe une application $\mathbf{R}$-linéaire et une seule d de $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Omega)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) La restriction de d à $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{R})$ coïncide avec la différentielle des fonctions.

(2) Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$, on a

$$d(df) = 0 .$$

(3) Pour tout couple (u, v) d'éléments de $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$, avec u homogène de degré r, on a

$$d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^r u \wedge dv .$$

De plus, l'opérateur d vérifie les conditions suivantes :

(4) Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$, le support de du est contenu dans le support de u.

(5) Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^2(X, \Omega)$, on a

$$d(du) = 0 .$$

(6) Pour toute forme différentielle u *de* $\mathscr{C}^k(X, \Omega^r)$, *la forme* du *appartient à* $\mathscr{C}^{k-1}(X, \Omega^{r+1})$.

Montrons tout d'abord que si d vérifie (1), (2) et (3), il vérifie aussi (4), (5) et (6).

Soit u une forme différentielle de $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$ nulle sur un ensemble ouvert V de X. Pour tout point x de V, il existe une fonction α de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de x. On a d'après (1) et (3),

$$0 = d(\alpha u) = d\alpha \wedge u + \alpha du$$

et puisque le germe de $\alpha - 1$ au point x est stationnaire, on en déduit que $du(x)$ est nul.

Pour démontrer (5), on peut supposer u de la forme

$$u = f dv_1 \wedge \dots \wedge dv_r$$

où f est une fonction de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$ et $v_1, \dots, v_r$ des fonctions de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ (lemme 6). Par récurrence sur r, on déduit alors de (1), (2) et (3) que l'on a

$$du = df \wedge dv_1 \wedge \dots \wedge dv_r$$

(ce qui en passant démontre (6) et l'unicité de d). De même,

$$d(du) = 0 .$$

Il reste à montrer l'existence de d. Par localisation et unicité, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Pour toute forme différentielle

$$u = \sum_{J \in S_r(n)} u_J \, dx_J ,$$

où les fonctions u_J appartiennent à $\mathscr{C}^1(X, \mathbf{R})$ et pour tout entier j compris entre 1 et n, on pose

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{J \in S_r(n)} \frac{\partial u_J}{\partial x_j} dx_J \quad \text{et} \quad du = \sum_{1 \leq j \leq n} dx_j \wedge \frac{\partial u}{\partial x_j} .$$

Si u est de degré 0, cette définition coïncide avec celle de la différentielle d'une fonction. Si de plus u appartient à $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned} d(du) &= \sum_{1 \leq j,k \leq n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \wedge dx_k \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_k = 0 . \end{aligned}$$

Montrons enfin la condition (3). On peut supposer u et v de la forme

$$u = f\,dx_J \quad \text{et} \quad v = g\,dx_K$$

où J appartient à $S_r(n)$ et K à $S_s(n)$. On a alors

$$d(u \wedge v) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial (fg)}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_J \wedge dx_K$$

$$= \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, g\, dx_j \wedge dx_J \wedge dx_K + (-1)^r \sum_{1 \leq j \leq n} f \frac{\partial g}{\partial x_j}\, dx_J \wedge dx_j \wedge dx_K$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

On appelle *différentielle d'une forme* u *de* $\mathscr{C}^1(X, \Omega)$ la forme différentielle du définie dans le théorème 1. On dit qu'une forme différentielle est *fermée* (resp. *exacte*) si elle appartient au noyau (resp. à l'image) de d.

Soit h une application indéfiniment dérivable de X dans une variété differentielle Y de dimension pure m.

Pour tout point x de X, la composition des applications induit un homomorphisme

$$h_x^* : A^1_{h(x)} \to A^1_x$$

qui envoie l'idéal maximal (resp. l'idéal des germes stationnaires) de $A^1_{h(x)}$ dans l'idéal correspondant de A^1_x. Par restriction et passage aux quotients, on en déduit une application linéaire de $\Omega^1_{h(x)}(Y)$ dans $\Omega^1_x(X)$ que l'on appelle l'*application cotangente à* h *au point* x. Par passage à l'algèbre extérieure, cette application définit un homomorphisme de $\Omega_{h(x)}(Y)$ dans $\Omega_x(X)$ que l'on désigne encore par h_x^*.

Pour toute forme différentielle u sur Y, on définit une forme différentielle $h^*(u)$ sur X appelée l'*image réciproque de* u *par* h en posant

$$h^*(u)(x) = h_x^*(u(h(x)))\,.$$

Cette application induit un homomorphisme de $\mathscr{F}(Y, \Omega)$ dans $\mathscr{F}(X, \Omega)$.

Désignons par ϕ une carte de domaine U dans X et par ψ une carte de domaine V contenant $h(U)$ dans Y. On a par définition

$$h^*(d\psi_j) = d(\psi_j \cdot h) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial(\psi_j \cdot h)}{\partial \phi_k}\, d\phi_k$$

pour tout entier j compris entre 1 et m. Si u est homogène de degré r, on a

$$u\,|_V = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq m} u_{j_1, \ldots, j_r}\, d\psi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\psi_{j_r}$$

et par conséquent

$$h^*(u) \mid_U = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq m} (u_{j_1, \ldots, j_r} \cdot h)\, d(\psi_{j_1} \cdot h) \wedge \ldots \wedge d(\psi_{j_r} \cdot h)\,.$$

En particulier, si u appartient à $\mathscr{C}^k(Y, \Omega)$, alors $h^*(u)$ appartient à $\mathscr{C}^k(X, \Omega)$ et si k est strictement positif, on a

$$h^*(du) = dh^*(u)\,.$$

Proposition 1 (Lemme de Poincaré). *Désignons par* X *un voisinage convexe de l'origine dans* $\mathbf{R}^n$. *Il existe une application linéaire* k *de* $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega)$ *dans lui-même telle que*

$$d \cdot k + k \cdot d = 1 - \varepsilon$$

où ε *désigne la forme linéaire sur* $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega)$ *qui associe à toute forme différentielle la valeur à l'origine de sa partie homogène de degré* 0.

On désigne par I l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et par h l'application de $I \times X$ dans X définie par

$$h(t, x) = tx\,.$$

Pour toute forme différentielle

$$v = \sum_{J \in S_r(n)} v_J\, dx_J$$

sur $I \times X$ indépendante de dt, on pose

$$d_X v = \sum_{1 \leq j \leq n} dx_j \wedge \frac{\partial v}{\partial x_j} = dv - dt \wedge \frac{\partial v}{\partial t}$$

et

$$\int_0^1 v\, dt = \sum_{J \in S_r(n)} \left(\int_0^1 v_J\, dt\right) dx_J\,.$$

Pour toute forme différentielle

$$u = \sum_{J \in S_r(n)} u_J\, dx_J$$

sur X, l'image réciproque $h^*(u)$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$h^*(u) = u_1 + dt \wedge u_2$$

où les formes différentielles u_1 et u_2 sont indépendantes de dt. Notons que les coefficients a_J de u_1 sont donnés par la formule

$$a_J(t, x) = t^r u_J(tx)\,.$$

On pose alors

$$k(u) = \int_0^1 u_2\, dt\,.$$

L'image réciproque de la différentielle de u est donnée par la formule

$$h^*(du) = dh^*(u) = d_X u_1 + dt \wedge \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - d_X u_2\right)$$

et par conséquent

$$(k \cdot d)(u) = \int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial t}\, dt - \int_0^1 (d_X u_2)\, dt$$

On conclut en remarquant que l'on a

$$\textstyle\int_0^1 (d_X u_2)\, dt = d(\int_0^1 u_2\, dt) = (d \cdot k)(u)$$

et

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial t}\, dt = u & \text{si} \quad r \neq 0 \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial t}\, dt = u - u(0) & \text{si} \quad r = 0\,. \end{cases}$$

Il résulte du lemme de Poincaré que la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \to \mathbf{R} \xrightarrow{\iota} \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d} \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n) \to 0$$

où ι désigne l'injection canonique de $\mathbf{R}$ dans les fonctions constantes, est exacte pour tout ensemble ouvert convexe (non vide) de $\mathbf{R}^n$.

Soit X un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Toute forme différentielle u de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega)$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$u = \sum_J u_J\, dx_J$$

où J parcourt l'ensemble de toutes les suites strictement croissantes d'entiers compris entre 1 et n. On pose

$$i(u) = \textstyle\int_X u_{1, \dots, n}\, dt_1 \dots dt_n\,.$$

Proposition 2 (Lemme de Poincaré). *Désignons par X un cube ouvert de $\mathbf{R}^n$. Il existe une forme différentielle ω de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^n)$ et une application linéaire k de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega)$ dans lui-même telles que*

$$i(\omega) = 1 \quad \textit{et} \quad d \cdot k + k \cdot d = 1 - \omega i\,.$$

Pour tout entier j compris entre 0 et n, on désigne par A_j l'ensemble des formes différentielles de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega)$ indépendantes de $dx_1, \dots, dx_j$. Notons que l'on a

$$A_0 = \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega) \qquad \text{et} \qquad A_n = \mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})\,.$$

On désigne par d_j l'application de A_j dans lui-même définie par

$$d_j u = \sum_{j+1 \leq k \leq n} dx_k \wedge \frac{\partial u}{\partial x_k} .$$

Notons que d_n est identiquement nulle et que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ commute avec d_j pour k compris entre 1 et n.

Désignons par I le côté de X. On définit une application i_j de A_j dans $C^\infty(I^j, \mathbf{R})$ en posant

$$i_j(u)(x_1, \ldots, x_j) = \int_{I^{n-j}} u_{j+1,\ldots,n}(x_1, \ldots, x_j, t_{j+1}, \ldots, t_n)\, dt_{j+1} \ldots dt_n$$

où $u_{j+1,\ldots,n}$ désigne le coefficient de la partie homogène de degré $n-j$ dans u. Notons que i_n est l'application identique et que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ commute avec i_j pour k compris entre 1 et j.

La formule fondamentale du calcul différentiel et intégral montre que l'on a

$$i_j(d_j u) = \sum_{j+1 \leq k \leq n} (-1)^{k-j-1} \int_{I^{n-j}} \frac{\partial u_{j+1,\ldots,\hat{k},\ldots,n}}{\partial x_k} dt_{j+1} \ldots dt_n = 0 .$$

Choisissons une fonction α de $\mathscr{C}_c^\infty(I, \mathbf{R})$ telle que

$$\int_I \alpha(t)\, dt = 1$$

et posons

$$\omega_j(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{j+1 \leq k \leq n} \alpha(x_k)\, dx_k .$$

Notons que ω_n est la fonction constante 1 et que $i_0(\omega_0)$ est égal à 1.

Par récurrence descendante sur j, nous allons construire une application linéaire k_j de A_j dans lui-même qui commute avec l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ pour k compris entre 1 et j et telle que

$$d_j \cdot k_j + k_j \cdot d_j = 1 - \omega_j i_j .$$

On prend pour k_n l'application identique de A_n. Supposons j inférieur ou égal à n et k_j construit. Toute forme différentielle u de A_{j-1} s'écrit d'une manière et d'une seule

$$u = u_1 + dx_j \wedge u_2$$

avec u_1 et u_2 dans A_j. Notons que l'on a

$$d_{j-1}(u) = d_j u_1 + dx_j \wedge \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} - d_j u_2\right).$$

On pose alors

$$l(u)(x_1, \dots, x_n)$$
$$= \int_{-\infty}^{x_j} \big(i_j(u_2)(x_1, \dots, x_{j-1}, t) - i_{j-1}(u)(x_1, \dots, x_{j-1})\,\alpha(t)\big)\,dt\,.$$

Il est clair que l est une application linéaire de A_{j-1} dans $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ qui commute avec l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ pour k compris entre 1 et $j-1$. De plus, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(l(u))(x_1, \dots, x_n) = i_j(u_2)(x_1, \dots, x_j) - i_{j-1}(u)(x_1, \dots, x_{j-1})\,\alpha(x_j)$$
$$l(d_{j-1}u)(x_1, \dots, x_n) = i_j(u_1)(x_1, \dots, x_j)\,.$$

On pose finalement

$$k_{j-1}(u) = k_j(u_1) - dx_j \wedge k_j(u_2) + l(u)\,\omega_j$$

et l'on vérifie aisément l'assertion.

Il résulte du lemme de Poincaré que la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \to \mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d} \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^1) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^n) \xrightarrow{i} \mathbf{R} \to 0$$

est exacte pour tout cube ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 1.

Toutes les constructions et les résultats de ce paragraphe demeurent valables si l'on utilise les germes de fonctions à valeurs complexes. On obtient alors le *fibré cotangent complexe à* X désigné par $\Omega^1_{\mathbf{C}}$. Pour tout point x de X et toute carte ϕ dont le domaine contient x, l'application $\varepsilon_{x,\phi}$ identifie $\Omega^1_{\mathbf{C},x}$ à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (lemme 1). On désigne de même par $\Omega^r_{\mathbf{C}}$ et $\Omega_{\mathbf{C}}$ les fibrés vectoriels $\Lambda^r\Omega^1_{\mathbf{C}}$ et $\Lambda\Omega^1_{\mathbf{C}}$. Notons que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\Omega^r_{\mathbf{C}} = \Omega^r \otimes \mathbf{C}_X \quad \text{et} \quad \Omega_{\mathbf{C}} = \Omega \otimes \mathbf{C}_X\,.$$

§ 4. Calcul intégral

LEMME 1. *Pour qu'une variété différentielle X de dimension pure n soit orientable, il faut et il suffit que le fibré Ω^n soit trivial.*

Désignons par $(\phi_\iota)_{\iota\in I}$ un atlas orienté de X et par $(\alpha_\iota)_{\iota\in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota\in I}$ formé des domaines de