§1. Fonctions holomorphes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

CHAPITRE PREMIER

VARIÉTÉS HOLOMORPHES

§ 1. FONCTIONS HOLOMORPHES

Soient E et F deux espaces vectoriels complexes de dimension finie. Pour toute application $\mathbf{R}$-linéaire u de E dans F, on définit deux applications u' et u'' en posant

$$u'(t) = \frac{1}{2}\big(u(t) - iu(it)\big) \quad \text{et} \quad u''(t) = \frac{1}{2}\big(u(t) + iu(it)\big).$$

On vérifie aisément que la première est $\mathbf{C}$-linéaire et la seconde $\mathbf{C}$-antilinéaire. On obtient ainsi une décomposition canonique

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{R}}(E, F) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(E, F) \oplus \operatorname{Hom}_{\overline{\mathbf{C}}}(E, F).$$

Soit U un ensemble ouvert de E. On dit qu'une application f de U dans F est *holomorphe* si elle est continûment dérivable et si sa dérivée en tout point est $\mathbf{C}$-linéaire. Il revient au même de dire que $(Df)''$ est nulle ou encore que $(Df)'$ est égale à Df. On désigne par $\mathcal{O}(U, F)$ l'ensemble des applications holomorphes de U dans F. Si F est égal à $\mathbf{C}$, on utilise aussi la notation $\mathcal{O}(U)$.

Notons que $\mathcal{O}(U)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{C}^1(U, \mathbf{C})$ et $\mathcal{O}(U, F)$ un sous-$\mathcal{O}(U)$-module fermé de $\mathscr{C}^1(U, F)$.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de cette définition (voir aussi [2], chap. VIII).

LEMME 1. *(1) La composée de deux applications holomorphes est holomorphe.*

(2) L'application réciproque d'un difféomorphisme holomorphe est holomorphe.

(3) Si une fonction holomorphe possède un logarithme, ce logarithme est holomorphe.

On identifie désormais $\mathbf{R}^{2n}$ à $\mathbf{C}^n$ au moyen de l'isomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire défini par

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_n) = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$$

et

$$\lambda^{-1}(z_1, \ldots, z_n) = \left(\frac{1}{2}(z_1 + \bar{z}_1), \ldots, \frac{1}{2}(z_n + \bar{z}_n), \frac{1}{2i}(z_1 - \bar{z}_1), \ldots, \frac{1}{2i}(z_n - \bar{z}_n)\right).$$

Les formules suivantes définissent des opérateurs différentiels sur $\mathbf{C}^n$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Soit U un ensemble ouvert de $\mathbf{C}^n$ et soit f une application continûment dérivable de U dans E. On vérifie aisément que l'on a

$$(Df(z))'(t) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z)\, t_j \quad \text{et} \quad (Df(z))''(t) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z)\, \bar{t}_j$$

pour tout point z de U et tout vecteur t de $\mathbf{C}^n$. En particulier, pour que f soit holomorphe, il faut et il suffit que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}$ soient nulles (conditions de Cauchy-Riemann). Supposons que E soit l'espace numérique $\mathbf{C}^m$ et que l'application $(f_1, \ldots, f_m)$ soit holomorphe. La matrice jacobienne de f est donnée par la formule

$$\operatorname{Jac}(f) = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial f_1'}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1'}{\partial x_n} & -\dfrac{\partial f_1''}{\partial x_1} & \cdots & -\dfrac{\partial f_1''}{\partial x_n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\dfrac{\partial f_m'}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m'}{\partial x_n} & -\dfrac{\partial f_m''}{\partial x_1} & \cdots & -\dfrac{\partial f_m''}{\partial x_n} \\
\dfrac{\partial f_1''}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1''}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_1'}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1'}{\partial x_n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\dfrac{\partial f_m''}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m''}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_m'}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m'}{\partial x_n}
\end{pmatrix}$$

où f'_j et f''_j désignent les parties réelle et imaginaire de f_j. En particulier, si m est égal à n, le jacobien de f est donné par la formule

$$\operatorname{jac}(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f'_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f'_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f'_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f'_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial f''_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f''_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f''_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f''_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}^2 .$$

Nous allons maintenant rappeler quelques propriétés des fonctions holomorphes d'une variable.

THÉORÈME 1 (Cauchy). *Désignons par* Y *une pièce compacte de* $\mathbf{C}$, *par* U *un voisinage ouvert de* Y *et par* f *une fonction de* $\mathscr{C}^1(U, \mathbf{C})$. *On a pour tout point* ζ *de* $\mathring{Y}$,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial Y} f(z)\,\frac{dz}{z-\zeta} + \frac{1}{2i\pi}\int_Y \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)\,\frac{dz \wedge d\bar z}{z-\zeta} .$$

La fonction $\dfrac{1}{z-\zeta}$ appartient à $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$. On en déduit que

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)\,\frac{dz \wedge d\bar z}{z-\zeta} = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{Y \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)\,\frac{dz \wedge d\bar z}{z-\zeta}$$

où D_ε désigne le disque de centre ζ et de rayon ε. De plus, la fonction $\dfrac{1}{z-\zeta}$ étant holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus\{\zeta\}$, la formule de Stokes (chap. 0, § 4, théorème 2) montre que l'on a

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)\,\frac{dz \wedge d\bar z}{z-\zeta} = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\partial D_\varepsilon} f(z)\,\frac{dz}{z-\zeta} - \int_{\partial Y} f(z)\,\frac{dz}{z-\zeta} .$$

On conclut en remarquant que

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\partial D_\varepsilon} f(z)\,\frac{dz}{z-\zeta} = \lim_{\varepsilon \to 0} i\int_0^{2\pi} f(\zeta + \varepsilon e^{i\theta})\,d\theta = 2i\pi f(\zeta) .$$

COROLLAIRE 1. *Soit* f *une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert* U *de* $\mathbf{C}$. *Pour tout point* ζ *de* U, *il existe une suite* $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ *de nombres complexes telle que la série*

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} a_k (z-\zeta)^k$$

converge uniformément vers f *sur tout disque* D *de centre* ζ *relativement compact dans* U. *En particulier, la fonction* f *appartient à* $\mathscr{C}^{\infty}(U, \mathbf{C})$ *et l'on a*

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(\zeta) = \frac{k\,!}{2i\pi} \int_{\partial D} f(z) \frac{dz}{(z-\zeta)^{k+1}} \qquad et \qquad \frac{\partial^k f}{\partial \bar{z}^k} = 0$$

pour tout entier naturel k.

Pour tout point w de D, la série

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{(w-\zeta)^k}{(z-\zeta)^{k+1}}$$

converge uniformément sur ∂D vers la fonction $\dfrac{1}{z-w}$. La formule de Cauchy montre alors que l'on a

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} f(z) \frac{dz}{z-w} = \sum_{k \in \mathbf{N}} (w-\zeta)^k \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} f(z) \frac{dz}{(z-\zeta)^{k+1}}$$

ce qui démontre l'assertion.

Corollaire 2 (Principe du prolongement analytique). *Soit* f *une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert connexe* U *de* $\mathbf{C}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) La fonction f *est identiquement nulle.*

(2) Il existe un point de U *où le germe de* f *est nul.*

(3) Il existe un point de U *où toutes les dérivées de* f *sont nulles.*

En particulier, pour tout point z *de* $\mathbf{C}$, *l'anneau* $\mathcal{O}_z$ *des germes au point* z *de fonctions holomorphes est intègre.*

Corollaire 3. *Soit* f *une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert connexe* U *de* $\mathbf{C}$. *On suppose que* f *n'est pas identiquement nulle. Pour tout point* ζ *de* U, *il existe un entier naturel* k *et une fonction holomorphe* g *sur* U *tels que*

$$f(z) = (z-\zeta)^k g(z) \qquad \text{et} \qquad g(\zeta) \neq 0\,.$$

De plus, l'entier k *et la fonction* g *sont uniquement déterminés par ces conditions. En particulier, pour tout point* z *de* $\mathbf{C}$, *l'anneau* $\mathcal{O}_z$ *est un anneau de valuation discrète* [1]).

[1]) Ceci signifie que $\mathcal{O}_z$ est principal et qu'il possède un unique idéal premier non nul.

Corollaire 4 (Weierstrass). *Soit* U *un ensemble ouvert de* $\mathbf{C}$. *Les topologies induites sur* $\mathcal{O}(U)$ *par* $L^1_{\text{loc}}(U, \mathbf{C})$ *et* $\mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{C})$ *coïncident.*

Soit K un ensemble compact de U et soit α une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(U, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de K. Pour toute fonction holomorphe f sur U, tout entier naturel k et tout point ζ de $\overset{\circ}{K}$, la formule de Cauchy appliquée à la fonction αf montre que l'on a

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}} f(z) \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-\zeta}$$

et

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(\zeta) = \frac{(-1)^k k!}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}} f(z) \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(z-\zeta)^{k+1}} .$$

Comme $\dfrac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}$ est nulle au voisinage de K, on en déduit qu'il existe une constante $c_{\alpha,k}$ telle que

$$\left\| \frac{\partial^k f}{\partial z^k} \right\|_K \leqslant c_{\alpha,k} \| f \|_{L^1, \text{ supp }(\alpha)} .$$

L'assertion en découle aussitôt.

Corollaire 5 (Liouville). *Toute fonction holomorphe bornée sur* $\mathbf{C}$ *est constante.*

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$. Pour tout entier naturel k et tout nombre réel r, on a

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\partial D_r} f(z) \frac{dz}{z^{k+1}} .$$

On en déduit que

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0) \right| \leqslant \frac{k! \ \| f \|_{D_r}}{r^k} .$$

Si f est bornée et k strictement positif, ceci implique que $\dfrac{\partial^k f}{\partial z^k}(0)$ est nul, d'où l'assertion.

Corollaire 6 (Laurent). *Soient* r, r_1 *et* r_2 *des nombres réels vérifiant les conditions*

$$0 \leqslant r_1 < r \leqslant r_2 .$$

On désigne par C *la couronne définie par*

$$C = \{ z \in \mathbf{C} \mid r_1 < | z | < r_2 \}$$

et par D *le disque de centre* 0 *et de rayon* r. *Pour toute fonction holomorphe* f *sur* C, *il existe une suite* $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ *de nombres complexes telle que la série*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k z^k$$

converge uniformément vers f *sur toute partie compacte de* C. *On a pour tout entier relatif* k,

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} f(z) \frac{dz}{z^{k+1}} \qquad et \qquad |a_k| \leqslant \frac{\|f\|_{\partial D}}{r^k} .$$

Pour tout entier k, la forme différentielle $f(z) \dfrac{dz}{z^{k+1}}$ est fermée. On en déduit que son intégrale sur ∂D est indépendante de r.

Introduisons deux nombres réels ρ_1 et ρ_2 vérifiant les relations

$$r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$$

et désignons par K la couronne définie par

$$K = \{ z \in \mathbf{C} \mid \rho_1 \leqslant |z| \leqslant \rho_2 \} .$$

Il résulte de la formule de Cauchy que l'on a pour tout point ζ de $\mathring{K}$,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} f(z) \frac{dz}{z-\zeta} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_2} f(z) \frac{dz}{z-\zeta} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_1} f(z) \frac{dz}{z-\zeta}$$

où D_1 et D_2 désignent les disques de centre 0 et de rayons ρ_1 et ρ_2 respectivement. Les séries

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{\zeta^k}{z^{k+1}} \qquad \text{et} \qquad - \sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}$$

convergent uniformément vers la fonction $\dfrac{1}{z-\zeta}$ sur ∂D_2 et ∂D_1 respectivement. On a par conséquent

$$f(\zeta) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \zeta^k \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_2} f(z) \frac{dz}{z^{k+1}} + \sum_{k \in \mathbf{N}} \zeta^{-(k+1)} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_1} f(z) \frac{dz}{z^{-k}}$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE 7 (Weierstrass). *Soit* D *un disque de centre* 0 *et de rayon* r *dans* $\mathbf{C}$ *et soit* f *une fonction holomorphe sur* $D \backslash \{0\}$. *On désigne par*

$(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ *les coefficients du développement de Laurent de* f *à l'origine et par* N *l'ensemble*

$$N = \{ k \in \mathbf{Z} \mid k < 0 \quad \text{et} \quad a_k \neq 0 \} .$$

(1) Pour que N *soit vide, il faut et il suffit que* f *soit bornée au voisinage de l'origine. La fonction* f *se prolonge alors en une fonction holomorphe sur* D.

(2) Pour que N *soit fini et non vide, il faut et il suffit que la fonction* $\frac{1}{f}$ *soit bornée au voisinage de l'origine.*

(3) Pour que N *soit infini, il faut et il suffit que l'image de* D *soit dense dans* $\mathbf{C}$.

Pour tout nombre réel ρ strictement compris entre 0 et r, on a

$$| a_k | \leqslant \rho^{-k} \sup_{|z| = \rho} |f(z)| .$$

La première assertion en résulte aussitôt.

Supposons N fini et non vide et désignons par k_0 sa borne inférieure. La fonction g définie par

$$g(z) = z^{-k_0} f(z)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur D ne s'annulant pas à l'origine, ce qui démontre la deuxième assertion.

Supposons N infini et montrons par l'absurde que l'image de f est dense. En effet, s'il existe un disque fermé de centre ζ dans $\mathbf{C}$ ne rencontrant pas $f(D)$, la fonction g définie sur $D \backslash \{0\}$ par

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \zeta}$$

demeure bornée au voisinage de l'origine ce qui est absurde en vertu de ce qui précède.

Soit $r = (r_1, \ldots, r_n)$ un élément de $(\mathbf{R}_+^*)^n$ et soit $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ un point de $\mathbf{C}^n$. On appelle *polydisque de centre* ζ *et de rayon* r l'ensemble défini par

$$D(\zeta, r) = \{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid | z_j - \zeta_j | < r_j \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant n \} .$$

On appelle *bord distingué du polydisque* $D(\zeta, r)$ l'ensemble

$$\partial_0 D(\zeta, r) = \{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid | z_j - \zeta_j | = r_j \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant n \} .$$

PROPOSITION 1 (Cauchy). *Soit f une fonction holomorphe au voisinage de l'adhérence d'un polydisque D de $\mathbf{C}^n$. Pour tout point ζ de D, on a*

$$f(\zeta) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int_{\partial_0 D} f(z) \frac{dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{(z_1 - \zeta_1) \ldots (z_n - \zeta_n)} .$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 1 et du théorème de Fubini.

COROLLAIRE 1. *Soit f une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert U de $\mathbf{C}^n$. Pour tout point ζ de U, il existe une famille $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^n}$ de nombres complexes telle que la série*

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} a_\alpha (z - \zeta)^\alpha \text{ [1]}$$

converge uniformément vers f sur tout polydisque D de centre ζ relativement compact dans U. En particulier, la fonction f appartient à $\mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{C})$ et l'on a

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(\zeta) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D} f(z) \frac{dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{(z_1 - \zeta_1)^{\alpha_1 + 1} \ldots (z_n - \zeta_n)^{\alpha_n + 1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \bar{z}^\alpha} = 0 .$$

pour tout multi-indice α.

La démonstration est analogue à celle du corollaire 1 du théorème 1.

COROLLAIRE 2 (Principe du prolongement analytique). *Soit f une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert connexe U de $\mathbf{C}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) La fonction f est identiquement nulle.

(2) Il existe un point de U où le germe de f est nul.

(3) Il existe un point de U où toutes les dérivées de f sont nulles.

En particulier, pour tout point z de $\mathbf{C}^n$, l'anneau $\mathcal{O}_z$ des germes au point z de fonctions holomorphes est intègre.

COROLLAIRE 3 (Weierstrass). *Soit U un ensemble ouvert de $\mathbf{C}^n$. Les topologies induites sur $\mathcal{O}(U)$ par $L^1_{\mathrm{loc}}(U, \mathbf{C})$ et $\mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{C})$ coïncident.*

---

[1]) Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et tout point $z = (z_1, \ldots, z_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \quad \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n! \quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_n^{\alpha_n}} \qquad \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{z}^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{z}_1^{\alpha_1} \ldots \partial \bar{z}_n^{\alpha_n}}$$

Une utilisation répétée de l'argument développé au corollaire 4 du théorème 1 montre qu'il existe pour tout polydisque D relativement compact dans U et pour tout multi-indice α une constante $c_{\alpha,D}$ telle que

$$\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}} \right\|_{\bar{D}} \leqslant c_{\alpha,D} \| f \|_{L^1,K}$$

où K est un voisinage compact de l'adhérence de D dans U. L'assertion en résulte aussitôt.

§ 2. Variétés holomorphes

Toutes les cartes de variétés topologiques considérées désormais prennent leurs valeurs dans des espaces numériques complexes.

Soit X une variété topologique.

On dit que deux cartes de X sont *holomorphiquement compatibles* si les changements de cartes sont holomorphes.

On appelle *atlas holomorphe de* X tout ensemble de cartes deux à deux holomorphiquement compatibles dont les domaines recouvrent X. On dit que deux atlas holomorphes sont *compatibles* si leur réunion est un atlas holomorphe. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures holomorphes de* X.

On appelle *variété holomorphe* toute variété topologique munie d'une structure holomorphe.

Soit X une variété holomorphe.

On appelle (abusivement) *atlas de* X tout atlas holomorphe appartenant à la structure holomorphe de X et *carte de* X toute carte appartenant à un atlas de X.

Soit x un point de X. Toutes les cartes de X dont le domaine contient x prennent leurs valeurs dans le même espace numérique complexe. La dimension de cet espace s'appelle la *dimension de* X *au point* x et se désigne par $\dim_x(X)$. La fonction $\dim(X)$ est localement constante. On dit que X est de *dimension pure* si elle est constante.

On appelle *courbe holomorphe* (resp. *surface holomorphe*) toute variété holomorphe de dimension pure 1 (resp. 2).

Les changements de cartes étant en particulier des difféomorphismes, la variété topologique X se trouve naturellement munie d'une structure différentielle que l'on dit *sous-jacente à* X. Pour éviter des confusions, on