

# Chapitre II COMPLÉMENTS D'ANALYSE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## CHAPITRE II

### COMPLÉMENTS D'ANALYSE

#### § 1. CONVOLUTION

Désignons par  $X$ ,  $X'$  et  $X''$  des ensembles ouverts de  $\mathbf{R}^n$ , par  $K$ ,  $K'$  et  $K''$  des ensembles compacts de  $X$ ,  $X'$  et  $X''$  respectivement. On suppose que  $X'$  contient l'ensemble

$$X - X'' = \{ t \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } x \in X \text{ et } y \in X'' \text{ tels que } t = x - y \}$$

et que  $K'$  contient l'ensemble

$$K - K'' = \{ t \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } x \in K \text{ et } y \in K'' \text{ tels que } t = x - y \}.$$

Pour toute fonction  $u$  de  $\mathcal{C}^0(X', \mathbf{C})$ , toute fonction  $v$  de  $\mathcal{C}_c^0(X'', \mathbf{C})$  et tout point  $x$  de  $X$ , on pose

$$(u * v)(x) = \int_{X''} u(x - y) v(y) d\mu(y) = \int_{X'} u(y) v(x - y) d\mu(y) = (v * u)(x)$$

où  $\mu$  désigne la mesure de Lebesgue dans  $\mathbf{R}^n$ . Il est clair que  $u * v$  est une fonction continue et on a l'inégalité

$$\| u * v \|_{L^1, K} \leq \| u \|_{L^1, K'} \| v \|_{L^1, K''}.$$

En particulier, l'application bilinéaire

$$* : \mathcal{C}^0(X', \mathbf{C}) \times \mathcal{C}_c^0(X'', \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}^0(X, \mathbf{C})$$

se prolonge de manière unique en une application bilinéaire séparément continue (et même hypocontinue)

$$* : L_{loc}^1(X', \mathbf{C}) \times L_c^1(X'', \mathbf{C}) \rightarrow L_{loc}^1(X, \mathbf{C})$$

que l'on appelle le *produit de convolution*.

Pour toute fonction  $u$  de  $L_{loc}^1(X', \mathbf{C})$  et toute fonction  $v$  de  $L_c^1(X'', \mathbf{C})$ , le support de  $u * v$  est contenu dans l'ensemble

$$X \cap (\text{supp}(u) + \text{supp}(v)).$$

En particulier, le produit de convolution induit une application bilinéaire

$$* : L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \times L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \rightarrow L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}).$$

PROPOSITION 1. *Pour tout couple  $(p, q)$  d'éléments conjugués de  $[1, \infty]$ , toute fonction  $u$  de  $L_{loc}^p(X', \mathbf{C})$  et toute fonction  $v$  de  $L_{K''}^q(X'', \mathbf{C})$ , on a*

$$\|u*v\|_{L^\infty, K} \leq \|u\|_{L^p, K'} \|v\|_{L^q, K''}.$$

On peut supposer  $u$  et  $v$  continues. Il résulte de l'inégalité de Hölder ([5], théorème (3.8)) que l'on a

$$|(u*v)(x)| \leq \int_{K'} |u(y)v(x-y)| d\mu(y) \leq \|u\|_{L^p, K'} \|v\|_{L^q, K''}$$

pour tout point  $x$  de  $K$ , ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE 1. *Désignons par  $u$  une fonction de  $L_{loc}^1(X', \mathbf{C})$  et par  $v$  une fonction de  $L_c^1(X'', \mathbf{C})$ . Si l'une des deux est continue, il en est de même de  $u*v$ .*

Supposons par exemple  $u$  continue et le support de  $v$  contenu dans  $K''$ . Pour toute fonction  $h$  de  $\mathcal{C}_{K''}^0(X'', \mathbf{C})$ , la fonction  $u*h$  est continue et l'on a

$$\|u*h\|_{L^\infty, K} \leq \|u\|_{L^1, K'} \|h\|_{L^\infty, K''}.$$

Ceci montre que  $u*v$  est limite dans  $L_{loc}^\infty(X, \mathbf{C})$  d'une suite de fonctions continues, d'où l'assertion.

COROLLAIRE 2. *Pour tout couple  $(p, q)$  d'éléments conjugués de  $[1, \infty]$ , le produit de convolution induit une application bilinéaire*

$$* : L_{loc}^p(X', \mathbf{C}) \times L_c^q(X'', \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}^0(X, \mathbf{C}).$$

COROLLAIRE 3. *Désignons par  $u$  une fonction de  $L_{loc}^1(X', \mathbf{C})$ , par  $v$  une fonction de  $L_c^1(X'', \mathbf{C})$  et par  $m$  un entier naturel (ou le symbole  $\infty$ ). Si l'une des fonctions est  $m$ -fois continûment dérivable, il en est de même de  $u*v$  et l'on a*

$$D^\alpha(u*v) = (D^\alpha u)*v \quad (\text{resp. } D^\alpha(u*v) = u*(D^\alpha v))$$

pour tout multi-indice  $\alpha$  de longueur au plus  $m$ .

La démonstration est analogue à celle du corollaire 1. Elle est laissée en exercice au lecteur.

PROPOSITION 2. *Pour tout élément  $p$  de  $[1, \infty]$ , toute fonction  $u$  de  $L_{loc}^1(X', \mathbf{C})$  et toute fonction  $v$  de  $L_{K''}^p(X'', \mathbf{C})$ , on a*

$$\|u*v\|_{L^p, K} \leq \|u\|_{L^1, K'} \|v\|_{L^p, K''}.$$

On peut supposer que  $p$  et son conjugué  $q$  sont réels et que les fonctions  $u$  et  $v$  sont continues. Pour toute fonction  $h$  de  $L_K^q(X, \mathbf{C})$ , le théorème de Fubini montre que l'on a

$$|\int_X (u * v) h d\mu| \leq \int_{K \times K'} |u(y) v(x-y) h(x)| d\mu(x) d\mu(y)$$

et l'inégalité de Hölder implique la relation

$$|\int_X (u * v) h d\mu| \leq \|u\|_{L^1, K'} \|v\|_{L^p, K'} \|h\|_{L^q, K}.$$

En particulier, si  $h$  est la fonction définie par

$$\begin{cases} h(x) = \overline{(u * v)(x)} |(u * v)(x)|^{p-2} & \text{si } x \in K \text{ et } (u * v)(x) \neq 0 \\ h(x) = 0 & \text{si } x \notin K \text{ ou } (u * v)(x) = 0, \end{cases}$$

on a

$$\|h\|_{L^q, K} = (\int_K |u * v|^p d\mu)^{1/q} = \|u * v\|_{L^p, K}^{p/q}.$$

Par conséquent,

$$\|u * v\|_{L^p, K}^p = \int_X (u * v) h d\mu \leq \|u\|_{L^1, K'} \|v\|_{L^p, K'} \|u * v\|_{L^p, K}^{p/q}$$

ce qui démontre la proposition.

**COROLLAIRE.** Pour tout élément  $p$  de  $[1, \infty]$ , le produit de convolution induit des applications bilinéaires

$$* : L_{loc}^1(X', \mathbf{C}) \times L_c^p(X'', \mathbf{C}) \rightarrow L_{loc}^p(X, \mathbf{C})$$

et

$$* : L_{loc}^p(X', \mathbf{C}) \times L_c^1(X'', \mathbf{C}) \rightarrow L_{loc}^p(X, \mathbf{C}).$$

Munissons l'espace numérique  $\mathbf{R}^n$  de la norme  $|\cdot|$  définie par

$$|(x_1, \dots, x_n)| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

On appelle *fonction marteau* sur  $\mathbf{R}^n$  toute fonction  $\phi$  de  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$  à valeurs dans le segment  $[0, 1]$ , dont le support est contenu dans la boule unité et telle que

$$\|\phi\|_{L^1, \mathbf{R}^n} = \int_{\mathbf{R}^n} \phi d\mu = 1.$$

De telles fonctions existent (appendice I, lemme 3). Pour tout nombre réel  $\varepsilon$  strictement positif, on désigne par  $\phi_\varepsilon$  la fonction de  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$  définie par

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Le support de  $\phi_\varepsilon$  est contenu dans la boule de rayon  $\varepsilon$  et l'on a encore

$$\|\phi_\varepsilon\|_{L^1, \mathbf{R}^n} = 1.$$

PROPOSITION 3. *Pour toute fonction  $u$  de  $\mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  (resp.  $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ ), le produit de convolution  $u * \phi_\varepsilon$  converge vers  $u$  dans  $\mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  (resp.  $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ ) lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.*

Pour tout ensemble compact  $K$  de  $\mathbf{R}^n$ , on pose

$$K_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } y \in K \text{ tel que } |y - x| \leq \varepsilon\}.$$

Pour tout point  $x$  de  $K$ , on a la relation

$$u(x) - (u * \phi_\varepsilon)(x) = \int_{K_\varepsilon} (u(x) - u(y)) \phi_\varepsilon(x - y) d\mu(y)$$

et l'assertion résulte immédiatement de la continuité uniforme de  $u$  sur  $K_\varepsilon$ .

COROLLAIRE. *Pour toute variété différentielle  $X$  et tout fibré vectoriel complexe  $\pi$  sur  $X$ , l'ensemble  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \pi)$  est dense dans les espaces  $\mathcal{C}_c^0(X, \pi)$  et  $\mathcal{C}^0(X, \pi)$ .*

PROPOSITION 4. *Pour tout nombre réel  $p$  au moins égal à 1 et toute fonction  $u$  de  $L_c^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  (resp.  $L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ ), le produit de convolution  $u * \phi_\varepsilon$  converge vers  $u$  dans  $L_c^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  (resp.  $L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ ) lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.*

Pour tout ensemble compact  $K$  de  $\mathbf{R}^n$  et toute fonction  $v$  de  $\mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ , on a

$$\|u - u * \phi_\varepsilon\|_{L^p, K} \leq \|u - v\|_{L^p, K} + \|v - v * \phi_\varepsilon\|_{L^p, K} + \|(v - u) * \phi_\varepsilon\|_{L^p, K}$$

et par conséquent (proposition 2),

$$\begin{aligned} \|u - u * \phi_\varepsilon\|_{L^p, K} &\leq \|u - v\|_{L^p, K} + \mu(K)^{1/p} \|v - v * \phi_\varepsilon\|_{L^\infty, K} \\ &\quad + \|v - u\|_{L^p, K_\varepsilon}. \end{aligned}$$

L'assertion est alors une conséquence de la proposition 3 et de la densité de  $\mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  dans  $L_c^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  (resp.  $L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ ).

COROLLAIRE. *Pour toute variété différentielle  $X$ , tout fibré vectoriel complexe  $\pi$  sur  $X$  et tout nombre réel  $p$  au moins égal à 1, l'ensemble  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \pi)$  est dense dans les espaces  $L_c^p(X, \pi)$  et  $L_{\text{loc}}^p(X, \pi)$ .*

Pour toute fonction  $w$  de  $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ , toute fonction  $u$  de  $\mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  et tout point  $x$  de  $\mathbf{R}^n$ , on pose

$$\underline{w}(u)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} w(x, y) u(y) d\mu(y).$$

PROPOSITION 5. (1) La fonction  $\underline{w}(u)$  est continue.

(2) Si la restriction au support de  $w$  de la deuxième projection de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^n$  est propre, la fonction  $\underline{w}(u)$  est à support compact.

(3) Pour tout ensemble compact  $K'$  de  $\mathbf{R}^n$  et tout ensemble compact  $K''$  de  $\mathbf{R}^n$  contenant le support de  $u$ , on a

$$\| \underline{w}(u) \|_{L^2, K'} \leq \| w \|_{L^2, K' \times K''} \| u \|_{L^2, K''}.$$

Les deux premières assertions résultent immédiatement des définitions, la troisième de l'inégalité de Hölder.

COROLLAIRE. *L'application bilinéaire*

$$N : \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \times \mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$$

définie par

$$N(w, u) = \underline{w}(u)$$

se prolonge de manière unique en une application bilinéaire séparément continue (et même hypocontinue)

$$N : L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \times L_c^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}).$$

Pour toute fonction  $w$  de  $L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ , l'application linéaire continue

$$N(w, \cdot) : L_c^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$$

s'appelle l'opérateur de noyau  $w$ .

PROPOSITION 6. On désigne par  $w$  une fonction de  $L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ , par  $K'$  et  $K''$  des ensembles compacts de  $\mathbf{R}^n$  vérifiant la relation

$$\text{supp}(w) \cap (\mathbf{R}^n \times K') \subset K'' \times K'.$$

L'opérateur de noyau  $w$  induit alors un opérateur compact <sup>1)</sup> de  $L_{K'}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  dans  $L_{K''}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ .

Désignons par  $\| \underline{w} \|$  la norme de l'opérateur  $\underline{w}$  dans l'espace de Banach des applications linéaires continues de  $L_{K'}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  dans  $L_{K''}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ . On a l'inégalité

$$\| \underline{w} \| \leq \| w \|_{L^2, K' \times K''}$$

et puisque les opérateurs compacts forment un sous-espace fermé de cet espace de Banach ([2], théorème (11.2.10)), on se ramène aussitôt au cas où  $w$  est la fonction caractéristique d'un pavé de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ . L'image de  $\underline{w}$

<sup>1)</sup> Ceci signifie que l'image de la boule unité est un ensemble relativement compact.

est alors un sous-espace vectoriel de dimension 1, ce qui achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE. On désigne par  $u$  une fonction de  $L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ , par  $K'$  et  $K''$  des ensembles compacts de  $\mathbf{R}^n$  vérifiant la relation

$$\text{supp}(u) + K' \subset K''.$$

Le produit de convolution  $u*$  induit alors un opérateur compact de  $L_{K'}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  dans  $L_{K''}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ .

La norme de l'opérateur  $u*$  vérifie la relation

$$\|u*\| \leq \|u\|_{L^1, \mathbf{R}^n}.$$

Comme dans la proposition 6, on se ramène immédiatement au cas où  $u$  appartient à  $\mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ . On remarque alors que  $u*$  n'est autre que l'opérateur de noyau

$$w(x, y) = u(x - y)$$

et l'on applique la proposition 6.

## § 2. ESPACES DE SOBOLEV

On désigne par  $X$  un ensemble ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et par  $\alpha$  un multi-indice de  $\mathbf{N}^n$ . On dit qu'une fonction  $u$  de  $L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C})$  est *faiblement dérivable d'ordre  $\alpha$*  s'il existe une fonction  $v$  de  $L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C})$  vérifiant la relation

$$\int_X hv \, d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_X u D^\alpha h \, d\mu$$

pour toute fonction  $h$  de  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$ . Si elle existe, une telle fonction  $v$  est unique (chap. 0, § 4, lemme 2 et chap. II, § 1, proposition 4, corollaire). On l'appelle la *dérivée faible d'ordre  $\alpha$  de  $u$* .

LEMME 1. On désigne par  $X$  un pavé ouvert

$$X = X_1 \times \dots \times X_n$$

de  $\mathbf{R}^n$  et par  $u$  une fonction de  $L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C})$ . On suppose que l'on a

$$\int_X u \frac{\partial h}{\partial x_1} \, d\mu = 0$$

pour toute fonction  $h$  de  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$ . La fonction  $u$  est alors indépendante de  $x_1$ . De manière plus précise, pour presque tout point  $(x_2, \dots, x_n)$  de

$X_2 \times \dots \times X_n$ , la fonction partielle  $u(, x_2, \dots, x_n)$  est presque partout constante.

Il résulte du théorème de Fubini que l'on a

$$\int_{X_1} u(t, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial h}{\partial x_1}(t) dt = 0$$

pour toute fonction  $h$  de  $\mathcal{C}_c^\infty(X_1, \mathbf{C})$  et pour presque tout point  $(x_2, \dots, x_n)$  de  $X_2 \times \dots \times X_n$  (loc. cit.). La mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}$  induit une forme linéaire  $\delta$  sur  $\mathcal{C}_c^\infty(X_1, \mathbf{C})$  dont le noyau est l'image de l'opérateur différentiel

$$\frac{\partial}{\partial x_1} : \mathcal{C}_c^\infty(X_1, \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(X_1, \mathbf{C}).$$

L'équation ci-dessus montre que la forme linéaire  $\lambda(x_2, \dots, x_n)$  définie sur  $\mathcal{C}_c^\infty(X_1, \mathbf{C})$  par

$$\lambda(x_2, \dots, x_n)(g) = \int_{X_1} u(t, x_2, \dots, x_n) g(t) dt$$

est proportionnelle à  $\delta$  ce qui démontre l'assertion (loc. cit.).

PROPOSITION 1. On désigne par  $X$  un ensemble ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , par  $m$  un entier naturel.

(1) Toute fonction  $u$  de  $\mathcal{C}^m(X, \mathbf{C})$  est faiblement dérivable d'ordre  $\alpha$  pour tout multi-indice  $\alpha$  de longueur au plus  $m$  et sa dérivée faible d'ordre  $\alpha$  coïncide avec sa dérivée partielle usuelle  $D^\alpha u$ .

(2) Toute fonction  $u$  de  $L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C})$  faiblement dérivable d'ordre  $\alpha$  pour tout multi-indice  $\alpha$  de longueur au plus  $m$  et dont les dérivées faibles d'ordre  $\alpha$  sont continues pour tout multi-indice  $\alpha$  de longueur  $m$  appartient à  $\mathcal{C}^m(X, \mathbf{C})$ .

La première assertion est une conséquence immédiate de la formule d'intégration par parties. Démontrons la seconde. La question étant locale, on peut supposer que  $X$  est un pavé de la forme

$$X = X_1 \times \dots \times X_n.$$

Par récurrence, on se ramène immédiatement au cas où  $m$  est égal à 1. Pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $n$ , il existe donc une fonction  $v_j$  de  $\mathcal{C}^0(X, \mathbf{C})$  vérifiant la relation

$$\int_X h v_j d\mu = - \int_X u \frac{\partial h}{\partial x_j} d\mu$$



pour toute fonction  $h$  de  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$ . Montrons par récurrence sur  $j$  que  $u$  est continue par rapport aux  $j$  premières variables et que l'on a

$$v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Pour tout point  $x$  de  $X$ , on pose

$$w(x) = \int_0^{x_j} v_j(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n) dt.$$

Il est clair que  $w$  est une fonction continue sur  $X$  et l'on a

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = v_j.$$

Il résulte alors du lemme 1 que  $u - w$  est indépendante de  $x_j$ , ce qui établit l'assertion.

Si elle existe, la dérivée faible d'ordre  $\alpha$  d'une fonction  $u$  de  $L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C})$  se désigne par  $D^\alpha u$ . La proposition 1 montre que cela ne risque pas d'entraîner de confusion.

LEMME 2. On désigne par  $X$ ,  $X'$  et  $X''$  des ensembles ouverts de  $\mathbf{R}^n$  tels que  $X'$  contienne  $X - X''$ , par  $u$  une fonction de  $L_{\text{loc}}^1(X', \mathbf{C})$ , par  $v$  une fonction de  $L_c^1(X'', \mathbf{C})$  et par  $\alpha$  un multi-indice de  $\mathbf{N}^n$ . Si l'une des fonctions est faiblement dérivable d'ordre  $\alpha$ , il en est de même de  $u*v$  et l'on a

$$D^\alpha(u*v) = (D^\alpha u)*v \quad (\text{resp. } D^\alpha(u*v) = u*(D^\alpha v)).$$

C'est une conséquence immédiate du théorème de Fubini.

Soit  $X$  un ensemble ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et soit  $m$  un entier naturel. On désigne par  $H_{\text{loc}}^m(X, \mathbf{C})$  l'ensemble des fonctions  $u$  de  $L_{\text{loc}}^2(X, \mathbf{C})$  dont les dérivées faibles  $D^\alpha u$  existent et appartiennent à  $L_{\text{loc}}^2(X, \mathbf{C})$  pour tout multi-indice  $\alpha$  de longueur au plus  $m$ . C'est un espace de Fréchet pour la topologie la moins fine rendant continues les applications  $D^\alpha$  de  $H_{\text{loc}}^m(X, \mathbf{C})$  dans  $L_{\text{loc}}^2(X, \mathbf{C})$ .

Soit  $X$  une variété différentielle et soit  $\pi$  un fibré vectoriel complexe sur  $X$ . On désigne par  $H_{\text{loc}}^m(X, \pi)$  l'ensemble des sections  $s$  de  $\pi$  vérifiant la condition suivante: pour toute carte  $\Phi$  de  $\pi$  et toute carte  $\phi$  de  $X$  ayant même domaine  $U$ , les fonctions coordonnées de  $(s_\phi)_\phi$  appartiennent à  $H_{\text{loc}}^m(\phi(U), \mathbf{C})$ . C'est de manière évidente un espace vectoriel localement convexe et complet. C'est un espace de Fréchet si  $X$  est dénombrable à l'infini.

Pour tout ensemble compact  $K$  de  $X$ , on désigne par  $H_K^m(X, \pi)$  le sous-espace fermé de  $H_{\text{loc}}^m(X, \pi)$  formé des sections dont le support est contenu dans  $K$ .

On désigne par  $H_c^m(X, \pi)$  l'ensemble des sections à support compact de  $H_{\text{loc}}^m(X, \pi)$ , muni de la topologie vectorielle limite inductive des espaces  $H_K^m(X, \pi)$ .

Notons que les inclusions canoniques

$$H_{\text{loc}}^{m'}(X, \pi) \subset H_{\text{loc}}^m(X, \pi) \subset H_{\text{loc}}^0(X, \pi) = L_{\text{loc}}^2(X, \pi)$$

et

$$H_c^{m'}(X, \pi) \subset H_c^m(X, \pi) \subset H_c^0(X, \pi) = L_c^2(X, \pi)$$

sont continues pour tout entier  $m'$  au moins égal à  $m$ .

PROPOSITION 2. *On désigne par  $X$ ,  $X'$  et  $X''$  des ensembles ouverts de  $\mathbf{R}^n$  tels que  $X'$  contienne  $X - X''$ . Pour tout entier naturel  $m$ , le produit de convolution induit des applications bilinéaires continues (et même hypocontinues)*

$$* : L_{\text{loc}}^1(X', \mathbf{C}) \times H_c^m(X'', \mathbf{C}) \rightarrow H_{\text{loc}}^m(X, \mathbf{C})$$

$$* : H_{\text{loc}}^m(X', \mathbf{C}) \times L_c^1(X'', \mathbf{C}) \rightarrow H_{\text{loc}}^m(X, \mathbf{C})$$

$$* : L_{\text{loc}}^2(X', \mathbf{C}) \times H_c^m(X'', \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}^m(X, \mathbf{C})$$

$$* : H_{\text{loc}}^m(X', \mathbf{C}) \times L_c^2(X'', \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}^m(X, \mathbf{C}).$$

C'est une conséquence immédiate des définitions et des propriétés du produit de convolution.

COROLLAIRE 1. *On désigne par  $m$  un entier naturel et par  $\phi$  une fonction marteau sur  $\mathbf{R}^n$ . Pour toute fonction  $u$  de  $H_c^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  (resp.  $H_{\text{loc}}^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ ), le produit de convolution  $u * \phi_\varepsilon$  converge vers  $u$  dans  $H_c^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  (resp.  $H_{\text{loc}}^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ ) lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.*

COROLLAIRE 2. *Pour toute variété différentielle  $X$ , tout fibré vectoriel complexe  $\pi$  sur  $X$  et tout entier naturel  $m$ , l'ensemble  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \pi)$  est dense dans les espaces  $H_c^m(X, \pi)$  et  $H_{\text{loc}}^m(X, \pi)$ .*

COROLLAIRE 3. *On désigne par  $u$  une fonction de  $L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ , par  $K'$  et  $K''$  des ensembles compacts de  $\mathbf{R}^n$  vérifiant la relation*

$$\text{supp}(u) + K' \subset K''.$$

Pour tout entier naturel  $m$ , le produit de convolution  $u*$  induit un opérateur compact de  $H_{K'}^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  dans  $H_{K''}^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ .

C'est une conséquence immédiate du corollaire de la proposition 6 du paragraphe 1.

LEMME 3. Pour toute fonction  $u$  de  $H_c^n(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  dont le support est contenu dans la boule de rayon  $r$ , on a

$$\|u\|_{L^\infty, \mathbf{R}^n} \leq (2r)^{n/2} \left\| \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \right\|_{L^2, \mathbf{R}^n}.$$

On peut supposer que  $u$  appartient à  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ . On a alors

$$u(x_1, \dots, x_n) = \int_{-r}^{x_1} \dots \int_{-r}^{x_n} \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} d\mu$$

pour tout point  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbf{R}^n$  et l'assertion résulte de l'inégalité de Hölder.

THÉORÈME 1 (Sobolev). On désigne par  $X$  une variété différentielle de dimension pure  $n$ , par  $\pi$  un fibré vectoriel complexe sur  $X$  et par  $m$  un entier au moins égal à  $n$ . Alors l'ensemble  $H_{\text{loc}}^m(X, \pi)$  est contenu dans  $\mathcal{C}^{m-n}(X, \pi)$ .

La question étant locale, il suffit de montrer que  $H_c^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  est contenu dans  $\mathcal{C}_c^{m-n}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ . Or toute fonction  $u$  de  $H_c^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  est limite d'une suite  $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$  de  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ , et puisque la suite  $(D^\alpha u_j)_{j \in \mathbf{N}}$  converge uniformément vers  $D^\alpha u$  pour tout multi-indice  $\alpha$  de longueur au plus  $m - n$  (lemme 3), le théorème est une conséquence immédiate de la proposition 1.

COROLLAIRE. Pour toute variété différentielle  $X$  et tout fibré vectoriel complexe  $\pi$  sur  $X$ , on a

$$\mathcal{C}^\infty(X, \pi) = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} H_{\text{loc}}^m(X, \pi) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_c^\infty(X, \pi) = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} H_c^m(X, \pi).$$

LEMME 4. Il existe des fonctions  $\phi_0, \dots, \phi_n$  de  $L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$  telles que

$$u = \phi_0 * u + \sum_{1 \leq j \leq n} \phi_j * \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

pour toute fonction  $u$  de  $H_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ .

On désigne par  $\phi_0$  une fonction marteau sur  $\mathbf{R}^n$  et l'on pose pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $n$  et pour tout point  $x$  de  $\mathbf{R}^n$ ,

$$\phi_j(x) = \int_0^1 x_j \phi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t^{n+1}}.$$

Montrons tout d'abord que  $\phi_j$  appartient à  $L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ . Pour tout point  $x$  de  $\mathbf{R}^n \setminus 0$ , on a

$$\phi_j(x) = \int_{|x|}^1 x_j \phi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t^{n+1}}$$

ce qui prouve déjà que  $\phi_j$  est continue sur  $\mathbf{R}^n \setminus 0$ , nulle en dehors de la boule unité. D'autre part, on a

$$|\phi_j(x)| \leq |x_j| \left( \frac{1}{n|x|^n} - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n|x|^{n-1}}$$

ce qui démontre l'assertion.

Pour vérifier l'égalité de l'énoncé, on peut supposer que  $u$  appartient à  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ . Pour tout couple  $(x, y)$  de points de  $\mathbf{R}^n$ , il résulte de la formule de Taylor que l'on a

$$u(x) = u(y) + \sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j) \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_j}(ty + (1-t)x) dt.$$

On multiplie les deux membres de cette égalité par  $\phi_0(x-y)$  et l'on intègre par rapport à  $y$ . Il vient

$$u(x) = (\phi_0 * u)(x) + \sum_{1 \leq j \leq n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_j}(ty + (1-t)x) (x_j - y_j) \phi_0(x-y) d\mu(y) dt.$$

Si l'on remplace  $x + t(y-x)$  par  $y$ , chacune des intégrales du membre de droite s'écrit

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left( \int_0^1 (x_j - y_j) \phi_0\left(\frac{x-y}{t}\right) \frac{dt}{t^{n+1}} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(y) d\mu(y) = \left( \phi_j * \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)(x)$$

ce qui démontre le lemme.

**THÉORÈME 2 (Rellich).** *Soit  $X$  une variété différentielle et soit  $\pi$  un fibré vectoriel complexe sur  $X$ . Pour tout ensemble compact  $K$  de  $X$  et tout entier naturel  $m$ , l'injection canonique de  $H_K^{m+1}(X, \pi)$  dans  $H_K^m(X, \pi)$  est un opérateur compact.*

On se ramène aisément au cas où  $K$  est un ensemble compact de  $\mathbf{R}^n$  et  $\pi$  le fibré produit  $\mathbf{C}_{\mathbf{R}^n}$ .

Conservons les notations du lemme 4 et désignons par  $K'$  un ensemble compact de  $\mathbf{R}^n$  contenant l'ensemble

$$K + \bigcup_{0 \leq j \leq n} \text{supp}(\phi_j).$$

Il résulte du corollaire 3 de la proposition 1 que les opérateurs

$$\phi_0^* : H_K^{m+1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \rightarrow H_{K'}^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$$

et

$$\phi_j^* \frac{\partial}{\partial x_j} : H_K^{m+1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \rightarrow H_{K'}^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$$

sont compacts. Il en est donc de même de l'injection canonique de  $H_K^{m+1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  dans  $H_{K'}^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  et l'on conclut en remarquant que  $H_K^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$  est fermé dans  $H_{K'}^m(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ .