

§1. Convolution

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CHAPITRE II

COMPLÉMENTS D'ANALYSE

§ 1. CONVOLUTION

Désignons par X , X' et X'' des ensembles ouverts de \mathbf{R}^n , par K , K' et K'' des ensembles compacts de X , X' et X'' respectivement. On suppose que X' contient l'ensemble

$$X - X'' = \{ t \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } x \in X \text{ et } y \in X'' \text{ tels que } t = x - y \}$$

et que K' contient l'ensemble

$$K - K'' = \{ t \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } x \in K \text{ et } y \in K'' \text{ tels que } t = x - y \}.$$

Pour toute fonction u de $\mathcal{C}^0(X', \mathbf{C})$, toute fonction v de $\mathcal{C}_c^0(X'', \mathbf{C})$ et tout point x de X , on pose

$$(u * v)(x) = \int_{X''} u(x - y) v(y) d\mu(y) = \int_{X'} u(y) v(x - y) d\mu(y) = (v * u)(x)$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue dans \mathbf{R}^n . Il est clair que $u * v$ est une fonction continue et on a l'inégalité

$$\| u * v \|_{L^1, K} \leq \| u \|_{L^1, K'} \| v \|_{L^1, K''}.$$

En particulier, l'application bilinéaire

$$* : \mathcal{C}^0(X', \mathbf{C}) \times \mathcal{C}_c^0(X'', \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}^0(X, \mathbf{C})$$

se prolonge de manière unique en une application bilinéaire séparément continue (et même hypocontinue)

$$* : L_{loc}^1(X', \mathbf{C}) \times L_c^1(X'', \mathbf{C}) \rightarrow L_{loc}^1(X, \mathbf{C})$$

que l'on appelle le *produit de convolution*.

Pour toute fonction u de $L_{loc}^1(X', \mathbf{C})$ et toute fonction v de $L_c^1(X'', \mathbf{C})$, le support de $u * v$ est contenu dans l'ensemble

$$X \cap (\text{supp}(u) + \text{supp}(v)).$$

En particulier, le produit de convolution induit une application bilinéaire

$$* : L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \times L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \rightarrow L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}).$$

PROPOSITION 1. *Pour tout couple (p, q) d'éléments conjugués de $[1, \infty]$, toute fonction u de $L_{loc}^p(X', \mathbf{C})$ et toute fonction v de $L_{K''}^q(X'', \mathbf{C})$, on a*

$$\|u*v\|_{L^\infty, K} \leq \|u\|_{L^p, K'} \|v\|_{L^q, K''}.$$

On peut supposer u et v continues. Il résulte de l'inégalité de Hölder ([5], théorème (3.8)) que l'on a

$$|(u*v)(x)| \leq \int_{K'} |u(y)v(x-y)| d\mu(y) \leq \|u\|_{L^p, K'} \|v\|_{L^q, K''}$$

pour tout point x de K , ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE 1. *Désignons par u une fonction de $L_{loc}^1(X', \mathbf{C})$ et par v une fonction de $L_c^1(X'', \mathbf{C})$. Si l'une des deux est continue, il en est de même de $u*v$.*

Supposons par exemple u continue et le support de v contenu dans K'' . Pour toute fonction h de $\mathcal{C}_{K''}^0(X'', \mathbf{C})$, la fonction $u*h$ est continue et l'on a

$$\|u*h\|_{L^\infty, K} \leq \|u\|_{L^1, K'} \|h\|_{L^\infty, K''}.$$

Ceci montre que $u*v$ est limite dans $L_{loc}^\infty(X, \mathbf{C})$ d'une suite de fonctions continues, d'où l'assertion.

COROLLAIRE 2. *Pour tout couple (p, q) d'éléments conjugués de $[1, \infty]$, le produit de convolution induit une application bilinéaire*

$$* : L_{loc}^p(X', \mathbf{C}) \times L_c^q(X'', \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}^0(X, \mathbf{C}).$$

COROLLAIRE 3. *Désignons par u une fonction de $L_{loc}^1(X', \mathbf{C})$, par v une fonction de $L_c^1(X'', \mathbf{C})$ et par m un entier naturel (ou le symbole ∞). Si l'une des fonctions est m -fois continûment dérivable, il en est de même de $u*v$ et l'on a*

$$D^\alpha(u*v) = (D^\alpha u)*v \quad (\text{resp. } D^\alpha(u*v) = u*(D^\alpha v))$$

pour tout multi-indice α de longueur au plus m .

La démonstration est analogue à celle du corollaire 1. Elle est laissée en exercice au lecteur.

PROPOSITION 2. *Pour tout élément p de $[1, \infty]$, toute fonction u de $L_{loc}^1(X', \mathbf{C})$ et toute fonction v de $L_{K''}^p(X'', \mathbf{C})$, on a*

$$\|u*v\|_{L^p, K} \leq \|u\|_{L^1, K'} \|v\|_{L^p, K''}.$$

On peut supposer que p et son conjugué q sont réels et que les fonctions u et v sont continues. Pour toute fonction h de $L_K^q(X, \mathbf{C})$, le théorème de Fubini montre que l'on a

$$|\int_X (u * v) h d\mu| \leq \int_{K \times K'} |u(y) v(x-y) h(x)| d\mu(x) d\mu(y)$$

et l'inégalité de Hölder implique la relation

$$|\int_X (u * v) h d\mu| \leq \|u\|_{L^1, K'} \|v\|_{L^p, K'} \|h\|_{L^q, K}.$$

En particulier, si h est la fonction définie par

$$\begin{cases} h(x) = \overline{(u * v)(x)} | (u * v)(x) |^{p-2} & \text{si } x \in K \text{ et } (u * v)(x) \neq 0 \\ h(x) = 0 & \text{si } x \notin K \text{ ou } (u * v)(x) = 0, \end{cases}$$

on a

$$\|h\|_{L^q, K} = (\int_K |u * v|^p d\mu)^{1/q} = \|u * v\|_{L^p, K}^{p/q}.$$

Par conséquent,

$$\|u * v\|_{L^p, K}^p = \int_X (u * v) h d\mu \leq \|u\|_{L^1, K'} \|v\|_{L^p, K'} \|u * v\|_{L^p, K}^{p/q}$$

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. *Pour tout élément p de $[1, \infty]$, le produit de convolution induit des applications bilinéaires*

$$* : L_{loc}^1(X', \mathbf{C}) \times L_c^p(X'', \mathbf{C}) \rightarrow L_{loc}^p(X, \mathbf{C})$$

et

$$* : L_{loc}^p(X', \mathbf{C}) \times L_c^1(X'', \mathbf{C}) \rightarrow L_{loc}^p(X, \mathbf{C}).$$

Munissons l'espace numérique \mathbf{R}^n de la norme $|\cdot|$ définie par

$$|(x_1, \dots, x_n)| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

On appelle *fonction marteau sur \mathbf{R}^n* toute fonction ϕ de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ à valeurs dans le segment $[0, 1]$, dont le support est contenu dans la boule unité et telle que

$$\|\phi\|_{L^1, \mathbf{R}^n} = \int_{\mathbf{R}^n} \phi d\mu = 1.$$

De telles fonctions existent (appendice I, lemme 3). Pour tout nombre réel ε strictement positif, on désigne par ϕ_ε la fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ définie par

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Le support de ϕ_ε est contenu dans la boule de rayon ε et l'on a encore

$$\|\phi_\varepsilon\|_{L^1, \mathbf{R}^n} = 1.$$

PROPOSITION 3. *Pour toute fonction u de $\mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (resp. $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$), le produit de convolution $u * \phi_\varepsilon$ converge vers u dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (resp. $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$) lorsque ε tend vers 0.*

Pour tout ensemble compact K de \mathbf{R}^n , on pose

$$K_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } y \in K \text{ tel que } |y - x| \leq \varepsilon\}.$$

Pour tout point x de K , on a la relation

$$u(x) - (u * \phi_\varepsilon)(x) = \int_{K_\varepsilon} (u(x) - u(y)) \phi_\varepsilon(x - y) d\mu(y)$$

et l'assertion résulte immédiatement de la continuité uniforme de u sur K_ε .

COROLLAIRE. *Pour toute variété différentielle X et tout fibré vectoriel complexe π sur X , l'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(X, \pi)$ est dense dans les espaces $\mathcal{C}_c^0(X, \pi)$ et $\mathcal{C}^0(X, \pi)$.*

PROPOSITION 4. *Pour tout nombre réel p au moins égal à 1 et toute fonction u de $L_c^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (resp. $L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$), le produit de convolution $u * \phi_\varepsilon$ converge vers u dans $L_c^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (resp. $L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$) lorsque ε tend vers 0.*

Pour tout ensemble compact K de \mathbf{R}^n et toute fonction v de $\mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, on a

$$\|u - u * \phi_\varepsilon\|_{L^p, K} \leq \|u - v\|_{L^p, K} + \|v - v * \phi_\varepsilon\|_{L^p, K} + \|(v - u) * \phi_\varepsilon\|_{L^p, K}$$

et par conséquent (proposition 2),

$$\begin{aligned} \|u - u * \phi_\varepsilon\|_{L^p, K} &\leq \|u - v\|_{L^p, K} + \mu(K)^{1/p} \|v - v * \phi_\varepsilon\|_{L^\infty, K} \\ &\quad + \|v - u\|_{L^p, K_\varepsilon}. \end{aligned}$$

L'assertion est alors une conséquence de la proposition 3 et de la densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ dans $L_c^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (resp. $L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$).

COROLLAIRE. *Pour toute variété différentielle X , tout fibré vectoriel complexe π sur X et tout nombre réel p au moins égal à 1, l'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(X, \pi)$ est dense dans les espaces $L_c^p(X, \pi)$ et $L_{\text{loc}}^p(X, \pi)$.*

Pour toute fonction w de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, toute fonction u de $\mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ et tout point x de \mathbf{R}^n , on pose

$$\underline{w}(u)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} w(x, y) u(y) d\mu(y).$$

PROPOSITION 5. (1) La fonction $\underline{w}(u)$ est continue.

(2) Si la restriction au support de w de la deuxième projection de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ dans \mathbf{R}^n est propre, la fonction $\underline{w}(u)$ est à support compact.

(3) Pour tout ensemble compact K' de \mathbf{R}^n et tout ensemble compact K'' de \mathbf{R}^n contenant le support de u , on a

$$\| \underline{w}(u) \|_{L^2, K'} \leq \| w \|_{L^2, K' \times K''} \| u \|_{L^2, K''}.$$

Les deux premières assertions résultent immédiatement des définitions, la troisième de l'inégalité de Hölder.

COROLLAIRE. *L'application bilinéaire*

$$N : \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \times \mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$$

définie par

$$N(w, u) = \underline{w}(u)$$

se prolonge de manière unique en une application bilinéaire séparément continue (et même hypocontinue)

$$N : L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \times L_c^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}).$$

Pour toute fonction w de $L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, l'application linéaire continue

$$N(w, \cdot) : L_c^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$$

s'appelle l'opérateur de noyau w .

PROPOSITION 6. On désigne par w une fonction de $L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, par K' et K'' des ensembles compacts de \mathbf{R}^n vérifiant la relation

$$\text{supp}(w) \cap (\mathbf{R}^n \times K') \subset K'' \times K'.$$

L'opérateur de noyau w induit alors un opérateur compact ¹⁾ de $L_{K'}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ dans $L_{K''}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$.

Désignons par $\| \underline{w} \|$ la norme de l'opérateur \underline{w} dans l'espace de Banach des applications linéaires continues de $L_{K'}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ dans $L_{K''}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$. On a l'inégalité

$$\| \underline{w} \| \leq \| w \|_{L^2, K' \times K''}$$

et puisque les opérateurs compacts forment un sous-espace fermé de cet espace de Banach ([2], théorème (11.2.10)), on se ramène aussitôt au cas où w est la fonction caractéristique d'un pavé de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. L'image de \underline{w}

¹⁾ Ceci signifie que l'image de la boule unité est un ensemble relativement compact.

est alors un sous-espace vectoriel de dimension 1, ce qui achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE. On désigne par u une fonction de $L_c^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$, par K' et K'' des ensembles compacts de \mathbf{R}^n vérifiant la relation

$$\text{supp}(u) + K' \subset K''.$$

Le produit de convolution $u*$ induit alors un opérateur compact de $L_{K'}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ dans $L_{K''}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$.

La norme de l'opérateur $u*$ vérifie la relation

$$\|u*\| \leq \|u\|_{L^1, \mathbf{R}^n}.$$

Comme dans la proposition 6, on se ramène immédiatement au cas où u appartient à $\mathcal{C}_c^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$. On remarque alors que $u*$ n'est autre que l'opérateur de noyau

$$w(x, y) = u(x - y)$$

et l'on applique la proposition 6.

§ 2. ESPACES DE SOBOLEV

On désigne par X un ensemble ouvert de \mathbf{R}^n et par α un multi-indice de \mathbf{N}^n . On dit qu'une fonction u de $L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C})$ est *faiblement dérivable d'ordre α* s'il existe une fonction v de $L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C})$ vérifiant la relation

$$\int_X hv \, d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_X u D^\alpha h \, d\mu$$

pour toute fonction h de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$. Si elle existe, une telle fonction v est unique (chap. 0, § 4, lemme 2 et chap. II, § 1, proposition 4, corollaire). On l'appelle la *dérivée faible d'ordre α de u* .

LEMME 1. On désigne par X un pavé ouvert

$$X = X_1 \times \dots \times X_n$$

de \mathbf{R}^n et par u une fonction de $L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C})$. On suppose que l'on a

$$\int_X u \frac{\partial h}{\partial x_1} \, d\mu = 0$$

pour toute fonction h de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$. La fonction u est alors indépendante de x_1 . De manière plus précise, pour presque tout point (x_2, \dots, x_n) de