

§1. Lemme de Grothendieck

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CHAPITRE III

THÉORÈME DE DUALITÉ

§ 1. LEMME DE GROTHENDIECK

Pour tout couple d'entiers (j, k) , on définit par récurrence un opérateur différentiel sur \mathbf{C} en posant

$$\frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^{j+k-1}}{\partial z^{j-1} \partial \bar{z}^k} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial^{j+k-1}}{\partial z^j \partial \bar{z}^{k-1}} \right).$$

Pour tout entier m au moins égal à $j + k$ et pour tout ensemble ouvert X de \mathbf{C} , cet opérateur se prolonge en une application linéaire continue de $H_{\text{loc}}^m(X, \mathbf{C})$ dans $H_{\text{loc}}^{m-j-k}(X, \mathbf{C})$ que l'on désigne encore par $\frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}$.

Pour toute fonction u de $H_{\text{loc}}^m(X, \mathbf{C})$ et toute fonction h de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$, on a la formule d'intégration par parties

$$\int_X \frac{\partial^{j+k} u}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} h \, d\mu = (-1)^{j+k} \int_X u \frac{\partial^{j+k} h}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} \, d\mu.$$

En effet, pour h fixé, les deux membres sont des formes linéaires continues sur $H_{\text{loc}}^m(X, \mathbf{C})$ qui coïncident sur $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$.

Remarquons d'autre part que la topologie de $H_{\text{loc}}^m(X, \mathbf{C})$ est définie par la famille de semi-normes

$$\| \cdot \|_{m,K} = \max_{j+k \leq m} \left\| \frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} \right\|_{L^2, K}$$

lorsque K parcourt l'ensemble des parties compactes de X .

LEMME 1. Pour toute fonction u de $H_c^{m+1}(X, \mathbf{C})$, on a

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_m = \left\| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right\|_m.$$

Par récurrence, on se ramène immédiatement au cas où m est nul, par densité et continuité au cas où u appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$. La formule d'intégration par parties montre alors que l'on a

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{L^2}^2 = \int_X \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 d\mu = \int_X \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} d\mu = - \int_X u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z \partial \bar{z}} d\mu$$

et

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right\|_{L^2}^2 = \int_X \left| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right|^2 d\mu = \int_X \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} d\mu = - \int_X u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z} \partial z} d\mu$$

ce qui démontre l'assertion.

Remarque 1.

Il résulte en particulier du lemme 1 que l'on a

$$\|u\|_1 = \max \left(\|u\|_{L^2}, \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{L^2} \right)$$

pour toute fonction u de $H_c^1(X, \mathbf{C})$. Par conséquent, l'application

$$\left(j, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) : H_K^1(X, \mathbf{C}) \rightarrow L_K^2(X, \mathbf{C}) \oplus L_K^2(X, \mathbf{C})$$

où j désigne l'injection canonique est continue d'image fermée pour toute partie compacte K de X .

Rappelons que les fonctions k et \bar{k} définies sur \mathbf{C}^* par

$$k(z) = \frac{1}{\pi z} \quad \text{et} \quad \bar{k}(z) = \frac{1}{\pi \bar{z}}$$

appartiennent à $L_{\text{loc}}^1(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

Désignons par D le disque de rayon r et de centre 0 dans \mathbf{C} et par α une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(D, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. On pose

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \quad \text{et} \quad \alpha'' = \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}.$$

Remarquons que les fonctions $\alpha' \bar{k}$ et $\alpha'' k$ appartiennent à $\mathcal{C}_c^\infty(D, \mathbf{C})$. Par conséquent, si X et X' sont des ensembles ouverts de \mathbf{C} tels que X contienne $X' + D$, le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$\begin{aligned} (\alpha k)* : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C}) &\rightarrow L_{\text{loc}}^1(X', \mathbf{C}) & \text{et} & & (\alpha \bar{k})* : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C}) &\rightarrow L_{\text{loc}}^1(X', \mathbf{C}) \\ (\alpha'' k)* : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(X', \mathbf{C}) & \text{et} & & (\alpha' \bar{k})* : L_{\text{loc}}^1(X, \mathbf{C}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(X', \mathbf{C}). \end{aligned}$$

THÉORÈME 1 (Grothendieck). *Le produit de convolution induit des applications linéaires continues*

$$(\alpha k)*: L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C}) \rightarrow H^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad (\alpha \bar{k})*: L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C}) \rightarrow H^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$$

et l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}((\alpha k)*u) = u|_{X'} + (\alpha''k)*u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z}((\alpha \bar{k})*u) = u|_{X'} + (\alpha'k)*u$$

pour toute fonction u de $L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$.

Soit u une fonction de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. On sait que $(\alpha k)*u$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(X', \mathbf{C})$ et l'on a

$$((\alpha k)*u)(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_X u(z) \alpha(\zeta - z) \frac{d\mu(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_D u(\zeta + z) \alpha(-z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

pour tout point ζ de X' . On a donc

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}((\alpha k)*u)(\zeta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{D \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(\zeta + z) \alpha(-z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

où D_ε désigne le disque de centre 0 et de rayon ε . La formule de Stokes (chap. 0, § 4, théorème 2, corollaire) montre que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}((\alpha k)*u)(\zeta) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_\varepsilon} u(\zeta + z) \alpha(-z) \frac{dz}{z} \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{D \setminus D_\varepsilon} u(\zeta + z) \alpha''(-z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}. \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_\varepsilon} u(\zeta + z) \alpha(-z) \frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta + \varepsilon e^{i\theta}) \alpha(-\varepsilon e^{i\theta}) d\theta = u(\zeta)$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{D \setminus D_\varepsilon} u(\zeta + z) \alpha''(-z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z} &= \frac{1}{\pi} \int_X u(z) \alpha''(\zeta - z) \frac{d\mu(z)}{\zeta - z} \\ &= ((\alpha''k)*u)(\zeta) \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule dans ce cas.

Désignons par λ une fonction de $\mathcal{C}^\infty_c(X', \mathbf{R})$ et par K un ensemble compact de X contenant l'ensemble $\text{supp}(\lambda) + D$. En vertu de ce qui précède, il existe des constantes c' et c'' telles que

$$\| \lambda((\alpha k)*u) \|_{L^2} \leq c' \| u \|_{L^2, K} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\lambda((\alpha k)*u)) \right\|_{L^2} \leq c'' \| u \|_{L^2, K}$$

pour toute fonction u de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. Ceci montre que l'application $(\alpha k)*$ de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ dans $\mathcal{C}^\infty(X', \mathbf{C})$ est continue lorsque l'on munit la source de la topologie induite par $L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ et le but de la topologie induite par $H^1_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$ (remarque 1). Par densité et continuité, on en déduit le théorème pour l'application $(\alpha k)*$. L'assertion relative à $(\alpha \bar{k})*$ s'en déduit par conjugaison.

Remarque 2.

On montre de la même manière que le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$k* : L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \rightarrow H^1_{\text{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \bar{k}* : L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \rightarrow H^1_{\text{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$$

et que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (k*u) = u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} (\bar{k}*u) = u$$

pour toute fonction u de $L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C})$. En particulier, les applications induites par $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sur les germes à l'origine de fonctions continûment dérivables sont surjectives.

Soit X une courbe holomorphe et soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X .

L'opérateur d'' se prolonge en une application continue de $H^{m+1}_{\text{loc}}(X, \pi)$ dans $H^m_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$. Pour toute section u de $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ et toute section h de $\mathcal{C}^\infty_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$, on a la formule d'intégration par parties

$$\int_X (d''u, h) = - \int_X (u, d''h) \quad ^1).$$

En effet, pour h fixé, les deux membres sont des formes linéaires continues sur $H^1_{\text{loc}}(X, \pi)$ qui coïncident sur $\mathcal{C}^\infty_c(X, \pi)$ (chap. 0, § 4, théorème 2, corollaire et chap. I, § 2, lemme 5).

Remarque 3.

L'application

$$(j, d'') : H^1_K(X, \pi) \rightarrow L^2_K(X, \pi) \oplus L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

¹⁾ Les notations sont celles de chap. 0, § 4, exemple 1.

où j désigne l'injection canonique est continue d'image fermée pour toute partie compacte K et X . C'est une conséquence immédiate des définitions et de la remarque 1.

THÉORÈME 2. *On désigne par u une section de $L_{\text{loc}}^2(X, \pi)$ et par m un entier naturel. S'il existe une section v de $H_{\text{loc}}^m(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ telle que*

$$\int_X (v, h) = - \int_X (u, d''h)$$

pour toute section h de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \pi^ \otimes \Omega^{1,0})$, alors u appartient à $H_{\text{loc}}^{m+1}(X, \pi)$.*

La question étant locale, on se ramène immédiatement au cas où X est un ensemble ouvert de \mathbf{C} et π le fibré produit \mathbf{C}_X . L'hypothèse signifie donc que la dérivée faible $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ existe et appartient à $H_{\text{loc}}^m(X, \mathbf{C})$. Désignons par

X' un ensemble ouvert relativement compact dans X , par D un disque de centre 0 tel que X contienne $X' + D$ et par α une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. Il résulte du théorème 1 que l'on a

$$u|_{X'} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} ((\alpha k) * u) - (\alpha'' k) * u = (\alpha k) * \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - (\alpha'' k) * u.$$

Par récurrence sur m , il résulte de ce même théorème que $u|_{X'}$ appartient à $H_{\text{loc}}^{m+1}(X', \mathbf{C})$, ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE (Théorème de régularité). *On conserve les notations et les hypothèses du théorème 2. Si v est indéfiniment dérivable, il en est de même de u . En particulier, si v est nulle, la section u est holomorphe.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 2 et du lemme de Sobolev (chap. II, § 2, théorème 1, corollaire).

LEMME 2. *Pour tout point x de X , il existe des voisinages ouverts U et V de x et une application linéaire continue P de $L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H_{\text{loc}}^1(U, \pi)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *Pour toute section u de $L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$, la section*

$$u|_U - (d'' \cdot P)(u)$$

est indéfiniment dérivable.

(2) *L'application P s'annule sur l'ensemble des sections de $L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dont la restriction à V est nulle.*

La question étant locale, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de \mathbf{C} et que π est le fibré produit \mathbf{C}_X^p . On désigne par V un voisinage ouvert

de x dans X , par U un voisinage ouvert relativement compact de x dans V et par D un disque centré à l'origine tel que V contienne $U + D$. Toute section u de $L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ s'écrit

$$u = (u_1, \dots, u_p) d\bar{z}$$

où u_1, \dots, u_p sont des fonctions de $L_{\text{loc}}^2(X, \mathbf{C})$. Il suffit de poser

$$P(u) = ((\alpha k) * u_1, \dots, (\alpha k) * u_p)$$

où α est une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(D, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0 (théorème 1).

THÉORÈME 3. *Il existe une application linéaire continue P de $L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H_{\text{loc}}^1(X, \pi)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *Pour toute section u de $L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$, la section*

$$u - (d'' \cdot P)(u)$$

est indéfiniment dérivable.

(2) *Si u est à support compact, il en est de même de $P(u)$.*

Il existe deux recouvrements ouverts localement finis $(U_i)_{i \in I}$ et $(V_i)_{i \in I}$ de X , tels que U_i soit relativement compact dans V_i et V_i relativement compact dans X et, pour chaque indice i , une application linéaire continue P_i de $L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H_{\text{loc}}^1(U_i, \pi)$ vérifiant les conditions du lemme 2. On désigne par $(\alpha_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$.

Pour toute section u de $L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ et pour tout couple (i, κ) d'indices la section

$$v_{\kappa i} = P_i(u) - P_\kappa(u)$$

est indéfiniment dérivable sur $U_i \cap U_\kappa$ (théorème de régularité). On désigne par $\tilde{v}_{\kappa i}$ la section de $\mathcal{C}^\infty(U_i, \pi)$ obtenue en prolongeant $\alpha_\kappa v_{\kappa i}$ par 0 et l'on pose

$$v_i = \sum_{\kappa \in I \setminus \{i\}} \tilde{v}_{\kappa i}$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). On a

$$v_i - v_\kappa = v_{\kappa i} = P_i(u) - P_\kappa(u),$$

et par conséquent les sections $P_i(u) - v_i$ se recollent en une section $P(u)$ de $H_{\text{loc}}^1(X, \pi)$. Il est clair que P est linéaire continue et l'on a

$$u|_{U_i} - (d'' \cdot P)(u)|_{U_i} = u|_{U_i} - (d'' \cdot P_i)(u) + d'' v_i$$

ce qui démontre (1).

Pour démontrer (2), il suffit de remarquer que le support de $P(u)$ est contenu dans $\bigcup_{i \in I'} U_i$

$$I' = \{ i \in I \mid \text{il existe } \kappa \in I \text{ tel que } U_i \cap U_\kappa \neq \emptyset \text{ et } V_\kappa \cap \text{supp}(u) \neq \emptyset \}.$$

Ceci résulte aisément de la construction et de ce que $P_i(u)$ est nul chaque fois que le support de u ne rencontre pas V_i .

On appelle *paramétrix* de d'' toute application linéaire continue P vérifiant les conditions du théorème 3.

Si P est une paramétrix de d'' , le théorème de régularité montre que $P(u)$ est indéfiniment dérivable si u l'est. De même, pour toute section v de $H_{\text{loc}}^1(X, \pi)$ la section

$$v - (P \cdot d'')(v)$$

est indéfiniment dérivable.

Il résulte d'autre part du théorème du graphe fermé que les applications linéaire

$$1 - d'' \cdot P: L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

et

$$1 - P \cdot d'': H_{\text{loc}}^1(X, \pi) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X, \pi),$$

$$1 - d'' \cdot P: L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

et

$$1 - P \cdot d'': H_c^1(X, \pi) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(X, \pi)$$

sont continues.

PROPOSITION 1. (1) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de $\mathcal{C}^\infty(X, \pi)$ et $\mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H_{\text{loc}}^1(X, \pi)$ et $L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ respectivement induisent des isomorphismes de $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ et $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ sur le noyau et le conoyau de l'application

$$d'': H_{\text{loc}}^1(X, \pi) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}).$$

(2) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \pi)$ et $\mathcal{C}_c^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H_c^1(X, \pi)$ et $L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ respectivement induisent des isomorphismes de $\mathbf{H}_c^0(X, \pi)$ et $\mathbf{H}_c^1(X, \pi)$ sur le noyau et le conoyau de l'application

$$d'': H_c^1(X, \pi) \rightarrow L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}).$$

C'est une conséquence immédiate de l'existence d'une paramétrix.