

§1. Théorème de décomposition de Weyl

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CHAPITRE IV

COURBES HOLOMORPHES COMPACTES

Dans tout ce chapitre, on désigne par X une courbe holomorphe compacte et connexe.

§ 1. THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION DE WEYL

PROPOSITION 1. *Pour toute forme différentielle u de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^{1,0})$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$), il existe une fonction v de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que $u + d'v$ (resp. $u - d''v$) soit fermée.*

Pour qu'une forme différentielle de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$ appartienne à l'image de l'opérateur $d' \cdot d''$, il faut et il suffit que son intégrale soit nulle (chap. III, § 3, proposition 4). La formule de Stokes montre qu'il en est ainsi de la forme différentielle du . Il existe par conséquent une fonction v de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$du = (d' \cdot d'')(v) = - (d'' \cdot d')(v)$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Les opérateurs différentiels*

$$d : \mathcal{C}^\infty(X, \Omega^1) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X, \Omega^2) = \mathcal{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$$

$$d'' : \mathcal{C}^\infty(X, \Omega^{1,0}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X, \Omega^{1,1}) \quad \text{et} \quad d' \cdot d'' : \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$$

ont même image.

En particulier, l'intégration des formes différentielles de degré 2 induit des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{H}^1(X) = \mathbf{H}^1(X, \Omega^{1,0}) = \mathbf{H}^2(X, \mathbf{C}) = \mathbf{C}.$$

Les inclusions

$$\text{Im}(d' \cdot d'') \subset \text{Im}(d'') \subset \text{Im}(d)$$

sont évidentes. Réciproquement, toute forme différentielle u de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ s'écrit

$$u = u_1 + u_2$$

avec u_1 de bidegré (1, 0) et u_2 de bidegré (0, 1). La proposition 1 montre qu'il existe des fonctions v_1 et v_2 de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telles que

$$d(u_1 + d'v_1) = 0 \quad \text{et} \quad d(u_2 - d''v_2) = 0.$$

On en déduit que

$$du = du_1 + du_2 = (d' \cdot d'')(v_1 + v_2)$$

ce qui démontre le corollaire.

Remarque 1.

On vient de donner une autre démonstration du fait que $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ est canoniquement isomorphe à \mathbf{C} pour une surface différentielle compacte connexe sous-jacente à une courbe holomorphe (chap. 0, § 4, théorème 3).

THÉORÈME 1 (Weyl). *Toute forme différentielle fermée u de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$ s'écrit d'une manière et d'une seule*

$$u = u_1 + u_2 + dv$$

où u_1 et u_2 sont des formes différentielles fermées de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^{1,0})$ et $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ respectivement et v une fonction de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C})$.

Montrons tout d'abord l'existence de la décomposition. On peut écrire

$$u = u'_1 + u'_2$$

avec u'_1 de bidegré (1, 0) et u'_2 de bidegré (0, 1). Il existe une fonction v de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$d(u'_1 - d'v) = 0$$

(proposition 1). Il suffit alors de poser

$$u_1 = u'_1 - d'v \quad \text{et} \quad u_2 = u'_2 - d''v.$$

Pour montrer l'unicité, on suppose que l'on a

$$u_1 + u_2 + dv = 0.$$

En appliquant l'opérateur différentiel d' aux deux membres de cette équation, on voit que v est harmonique, donc constante, ce qui démontre la proposition.

Toute forme différentielle holomorphe de degré 1 étant fermée, l'inclusion canonique de $\mathcal{O}(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$ induit par passage au quotient une application linéaire α de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$.

Désignons par $Z(X, \Omega_{\mathbb{C}}^1)$ l'ensemble des formes différentielles fermées de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbb{C}}^1)$. On définit une application linéaire $\tilde{\beta}$ de $Z(X, \Omega_{\mathbb{C}}^1)$ dans $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ en associant à toute forme fermée sa composante de bidegré $(0, 1)$. Par passage aux quotients, cette application définit une application linéaire β de $\mathbf{H}^1(X, \mathbb{C})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$.

PROPOSITION 2. *La suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires*

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0}) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{H}^1(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \rightarrow 0$$

est exacte.

La surjectivité de β résulte de la proposition 1, et le seul point non absolument trivial est de démontrer que tout élément u de $Z(X, \Omega_{\mathbb{C}}^1)$ dont l'image par $\tilde{\beta}$ est de la forme $d''v$ est équivalent à une forme différentielle holomorphe. Or, la relation

$$u = u_1 + d''v$$

avec u_1 homogène de bidegré $(1, 0)$ peut s'écrire

$$u = u_1 - d'v + dv.$$

La forme différentielle $u_1 - d'v$ étant fermée et homogène de bidegré $(1,0)$, elle est holomorphe ce qui démontre l'assertion.

On appelle *genre de X* la dimension de l'espace vectoriel complexe $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$. Par dualité (chap. III, § 2, proposition 2, corollaire), c'est aussi la dimension de l'espace $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. La proposition 2 montre que c'est un invariant différentiel (et même topologique): c'est la moitié de la dimension de l'espace $\mathbf{H}^1(X, \mathbb{C})$ (chap. 0, § 5, remarque 2).

Exemple 1.

Le genre de \mathbf{P}^1 est nul. En effet, désignons par u une forme différentielle holomorphe sur \mathbf{P}^1 . Pour chacune des cartes usuelles de \mathbf{P}^1 , on peut écrire

$$u_{\phi_0} = v_0 dz \quad \text{et} \quad u_{\phi_1} = v_1 dz$$

où v_0 et v_1 sont des fonctions holomorphes sur \mathbb{C} . Par changement de cartes, on voit que l'on a

$$v_0(z) = -\frac{1}{z^2} v_1\left(\frac{1}{z}\right)$$

en tout point z de \mathbb{C}^* . Ceci n'est possible que si v_0 et v_1 sont nulles.

Exemple 2.

Le genre d'une courbe elliptique X (chap. I, § 5, numéro 3) est égal à 1. En effet, toute forme différentielle holomorphe sur X se relève en une forme différentielle holomorphe $u dz$ sur \mathbf{C} . La fonction u étant invariante, elle est constante, ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 3. *La classe de Chern d'un fibré en droites holomorphe π sur X est un entier relatif égal à l'ordre de toute section méromorphe de π . En particulier, si la classe de Chern est strictement négative, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ est nul. Si la classe de Chern est nulle, le fibré π est différentiablement trivial. S'il est holomorphiquement trivial, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ est de dimension 1, sinon il est nul.*

Ces résultats sont énoncés ici pour mémoire (chap. I, § 4, lemme 1).

§ 2. PROBLÈMES DE COUSIN

Soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X . Nous avons vu (chap. I, § 3, proposition 2), qu'il existe une suite exacte

$$\mathcal{H}(X, \pi) \xrightarrow{\gamma_I} \mathcal{Q}(X, \pi) \xrightarrow{\delta} \mathbf{H}^1(X, \pi)$$

permettant de trouver sous quelles conditions il existe une section méromorphe de π ayant une partie principale donnée.

Soit u une partie principale de π et soit v une section holomorphe de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$. On vérifie aisément que la classe de (w_x, v_x) dans $\mathcal{Q}(\Omega^{1,0})_x$ ne dépend pas de la section méromorphe w de π représentant u au voisinage de x . On définit ainsi une partie principale de $\Omega^{1,0}$ que l'on désigne par (u, v) et l'on pose

$$\text{Rés}(u, v) = \sum_{x \in X} \text{Rés}((u, v), x).$$

On a alors la solution suivante au premier problème de Cousin.

THÉORÈME 1. *Soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X . Pour qu'une partie principale u de π provienne d'une section méromorphe, il faut et il suffit que la forme linéaire $\text{Rés}(u, \)$ soit identiquement nulle sur $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$.*

Rappelons tout d'abord la construction de $\delta(u)$ (chap. I, § 3, proposition 2). Désignons par x_1, \dots, x_n les points de X pour lesquels le germe u_x