Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: §2. Problèmes de Cousin
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Exemple 2.

Le genre d'une courbe elliptique X (chap. I, § 5, numéro 3) est égal à 1. En effet, toute forme différentielle holomorphe sur X se relève en une forme différentielle holomorphe $u\,dz$ sur $\mathbf{C}$. La fonction u étant invariante, elle est constante, ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 3. *La classe de Chern d'un fibré en droites holomorphe π sur X est un entier relatif égal à l'ordre de toute section méromorphe de π. En particulier, si la classe de Chern est strictement négative, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ est nul. Si la classe de Chern est nulle, le fibré π est différentiablement trivial. S'il est holomorphiquement trivial, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ est de dimension 1, sinon il est nul.*

Ces résultats sont énoncés ici pour mémoire (chap. I, § 4, lemme 1).

§ 2. PROBLÈMES DE COUSIN

Soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X. Nous avons vu (chap. I, § 3, proposition 2), qu'il existe une suite exacte

$$\mathscr{K}(X, \pi) \xrightarrow{\gamma_I} \mathscr{Q}(X, \pi) \xrightarrow{\delta} \mathbf{H}^1(X, \pi)$$

permettant de trouver sous quelles conditions il existe une section méromorphe de π ayant une partie principale donnée.

Soit u une partie principale de π et soit v une section holomorphe de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$. On vérifie aisément que la classe de (w_x, v_x) dans $\mathscr{Q}(\Omega^{1,0})_x$ ne dépend pas de la section méromorphe w de π représentant u au voisinage de x. On définit ainsi une partie principale de $\Omega^{1,0}$ que l'on désigne par (u, v) et l'on pose

$$\text{Rés}(u, v) = \sum_{x \in X} \text{Rés}\big((u, v), x\big).$$

On a alors la solution suivante au premier problème de Cousin.

THÉORÈME 1. *Soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X. Pour qu'une partie principale u de π provienne d'une section méromorphe, il faut et il suffit que la forme linéaire* $\text{Rés}(u, \ )$ *soit identiquement nulle sur* $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$.

Rappelons tout d'abord la construction de $\delta(u)$ (chap. I, § 3, proposition 2). Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ les points de X pour lesquels le germe u_x

n'est pas nul et par $(U_j)_{0 \leq j \leq n}$ un recouvrement ouvert de X vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout entier j compris entre 1 et n, l'ensemble U_j est le domaine d'une carte ϕ_j centrée au point x_j.

(2) Les ensembles $U_1, \ldots, U_n$ sont deux à deux disjoints.

(3) L'ensemble U_0 est égal à $X \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Quitte à diminuer $U_1, \ldots, U_n$, on peut supposer qu'il existe une section méromorphe u_j de π sur U_j représentant $u|_{U_j}$. On désigne par u_0 la fonction nulle sur U_0. Pour tout entier j compris entre 0 et n, il existe une section s_j de $\mathscr{C}^\infty(U_j, \pi)$ telle que

$$u_k - u_j = s_k - s_j$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). En particulier, les $d''s_j$ se recollent en une section t de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dont la classe dans $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ est précisément $\delta(u)$.

En vertu du théorème de dualité, il suffit de montrer que l'on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X (t, v) = \text{Rés}(u, v)$$

pour toute section holomorphe v de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$.

Les sections $s_j - u_j$ se recollent en une section h de $\mathscr{C}^\infty(U_0, \pi)$ et l'on a

$$d''h = t|_{U_0}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X (t, v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{X \backslash \bigcup_{1 \leq j \leq n} V_{j,\varepsilon}} (d''h, v) = \sum_{1 \leq j \leq n} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{2i\pi} \int_{\partial V_{j,\varepsilon}} (h, v)$$

où $V_{j,\varepsilon}$ désigne le disque de centre x_j et de rayon ε dans ϕ_j. D'autre part, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{2i\pi} \int_{\partial V_{j,\varepsilon}} (s_j, v) = 0$$

car s_j est continue au point x_j et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial V_{j,\varepsilon}} (u_j, v) = \text{Rés}((u, v), x_j)$$

ce qui démontre l'assertion.

Exemple 1.

Le genre de $\mathbf{P}^1$ étant nul, toute partie principale u de $\mathbf{C}_{\mathbf{P}1}$ provient d'une fonction méromorphe, résultat qu'il est d'ailleurs facile de démontrer directement (chap. I, § 5, lemme 2).

Exemple 2.

Supposons que X soit une courbe elliptique. Pour qu'une partie principale u de $\mathbf{C}_X$ provienne d'une fonction méromorphe, il faut et il suffit que l'on ait

$$\text{Rés}\,(u, dz) = 0$$

(§ 1, exemple 2) (que le lecteur se souvienne de la fonction elliptique p de Weierstrass!).

Exemple 3.

Si X est une courbe holomorphe quelconque, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie principale u de $\Omega^{1,0}$ provienne d'une forme différentielle méromorphe est que l'on ait

$$\text{Rés}\,(u, 1) = 0\,.$$

Parmi les formes différentielles méromorphes, on distingue les espèces suivantes:

(1) Les formes différentielles holomorphes ou *formes différentielles abéliennes de première espèce.*

(2) Les formes différentielles méromorphes dont les seules singularités sont des pôles d'ordre au moins 2 à résidu nul ou *formes différentielles abéliennes de deuxième espèce.*

(3) Les formes différentielles méromorphes ayant comme seules singularités un nombre pair de pôles d'ordre 1, groupés deux par deux de résidus opposés, ou *formes différentielles abéliennes de troisième espèce.*

Avant d'aborder le deuxième problème de Cousin pour les courbes holomorphes compactes, il nous faut introduire quelques notions.

Pour toute forme différentielle w de $\mathscr{C}^\infty\,(X, \Omega^{0,1})$, il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota\in I}$ de X et, pour chaque indice ι, une fonction h_ι de $\mathscr{C}^\infty\,(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$d''h_\iota = w\,|_{U_\iota}\,.$$

C'est une conséquence immédiate du lemme de Grothendieck (chap. III, § 1, remarque 2). Sur $U_\iota \cap U_\kappa$, la fonction définie par

$$h_{\kappa\iota} = h_\kappa - h_\iota$$

est holomorphe et l'on vérifie aisément que la famille $(g_{\kappa\iota})$ avec

$$g_{\kappa\iota} = \exp(2i\pi h_{\kappa\iota})$$

est un cocycle holomorphe de rang 1 subordonné à $(U_\iota)_{\iota\in I}$ dont la classe dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de la classe de w dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. On obtient ainsi un homomorphisme canonique

$$\theta : \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \to \mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*) .$$

Soit u un diviseur d'ordre 0 sur X. On peut l'écrire sous la forme (chap. I, § 4, lemme 3)

$$u = \sum_{1\leq j\leq n} y_j - x_j$$

où $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ sont des points de X (non nécessairement distincts).

On appelle *chaîne bordant* u toute famille $(c_j)_{1\leq j\leq n}$ où c_j est un chemin joignant x_j à y_j dans X.

Le lemme suivant est à rapprocher d'un résultat démontré précédemment (chap. O, § 5, proposition 1).

LEMME 1. *Soit u un diviseur d'ordre 0 sur X et soit $(c_j)_{1\leq j\leq n}$ une chaîne bordant u. Il existe une forme différentielle w de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) L'image par θ de la classe de w est le fibré principal associé à u.

(2) Pour toute forme différentielle holomorphe v sur X, on a

$$\int_X v \wedge w = \sum_{1\leq j\leq n} \int_{c_j} v .$$

On se ramène aisément au cas d'un seul chemin c joignant un point z_0 à un point z_1 dans le domaine U_0 d'une carte ϕ de X dont l'image est un disque de $\mathbf{C}$. Il n'y a pas ici de problème de lissage *(loc. cit.)*.

On désigne par W et V deux disques de ϕ tels que W soit relativement compact dans V et V relativement compact dans U_0 et tels que l'image de c soit contenue dans W. Le diviseur u est représenté sur U_0 par la fonction méromorphe

$$u_0(z) = \frac{\phi(z) - \phi(z_1)}{\phi(z) - \phi(z_0)}$$

et sur le complémentaire U_1 de $\overline{V}$ par la fonction constante 1.

Désignons par α une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 sur $X\backslash V$, à 0 sur $\overline{W}$ et par h un logarithme de u_0 sur $U_0\backslash\overline{W}$. La forme différentielle définie par

$$\begin{cases} w = 0 & \text{sur } (X \backslash U_0) \cup \overline{W} \\ w = \dfrac{1}{2i\pi} d''(\alpha h) & \text{sur } U_0 \backslash \overline{W} \end{cases}$$

appartient à $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$.

La propriété (1) résulte immédiatement des définitions. Pour démontrer (2), on remarque que la restriction de v à U_0 est exacte. On a donc

$$\int_X v \wedge w = \frac{1}{2i\pi} \int_{\overline{V}} v \wedge d''(\alpha h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\overline{V}} df \wedge d(\alpha h)$$

où f est une fonction holomorphe sur U_0. Il résulte alors de la formule de Stokes que l'on a

$$\int_X v \wedge w = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial V} f \frac{du_0}{u_0} = f(z_1) - f(z_0)$$

ce qui démontre l'assertion.

THÉORÈME 2 (Abel). *Pour qu'un diviseur u d'ordre 0 soit le diviseur d'une fonction méromorphe, il faut et il suffit qu'il existe une chaine $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ bordant u telle que*

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \int_{c_j} v = 0$$

pour toute forme différentielle holomorphe v sur X.

Montrons que la condition est nécessaire. On peut supposer u non nul. On désigne par h une fonction méromorphe sur X dont u est le diviseur, par n le degré de h (chap. I, § 4) et par B l'ensemble des valeurs critiques de h.

Soit c un chemin joignant $(0:1)$ à $(1:0)$ dans $\mathbf{P}^1$, ne rencontrant pas B, sauf peut-être en ses extrémités. Il existe n chemins distincts $c_1, \ldots, c_n$ relevant c, chacun joignant un pôle de h à un zéro de h. La chaîne $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ borde u et l'on a

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \int_{c_j} v = \int_c h_*(v)$$

(chap. I, § 4, proposition 3). On conclut en remarquant que $h_*(v)$ est nulle (§ 1, exemple 1).

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Désignons par w une forme différentielle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ vérifiant les conditions du lemme 1. La relation

$$\int_X v \wedge w = 0$$

pour toute forme différentielle holomorphe v montre que la classe de w dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ est nulle (théorème de dualité, chap. III, § 2). On en déduit que le fibré principal associé à u est trivial, ce qui démontre le théorème (chap. I, § 3, proposition 3).

§ 3. Théorème de Riemann-Roch

Pour tout fibré vectoriel holomorphe π sur X, les espaces vectoriels complexes $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ et $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ sont de dimension finie (chap. III, § 2, proposition 2, corollaire). On pose

$$\chi(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^1(X, \pi).$$

Le théorème de dualité *(loc. cit.)* montre que l'on a aussi

$$\chi(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}).$$

Proposition 1. *Désignons par π un fibré vectoriel holomorphe de rang p sur X et par ρ un fibré en droites holomorphe associé à un diviseur u de X. On a alors*

$$\chi(\pi \otimes \rho) = \chi(\pi) + p\, 0(u).$$

On se ramène aisément au cas où u est de la forme

$$u = 1 \cdot x$$

pour un certain point x de X. Désignons par s une section holomorphe de ρ ayant u pour diviseur. Le diagramme suivant est commutatif

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(X, \pi) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \rho) \\ d'' \downarrow & & \downarrow d'' \\ \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1} \otimes \rho). \end{array}$$

Pour tout fibré vectoriel différentiel σ sur X, le passage aux germes induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{C}^\infty(X, \sigma) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \sigma \otimes \rho) & \to & V(\sigma) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \\ 0 & \to & A_x^\infty(\sigma) & \xrightarrow{\otimes s_x} & A_x^\infty(\sigma \otimes \rho) & \to & W(\sigma) & \to & 0 \end{array}$$