Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1975)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN

Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.

Kapitel: §2. Problèmes de Cousin

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Exemple 2.

Le genre d'une courbe elliptique X (chap. I, § 5, numéro 3) est égal à 1. En effet, toute forme différentielle holomorphe sur X se relève en une forme différentielle holomorphe $u\,dz$ sur $\mathbf{C}$. La fonction u étant invariante, elle est constante, ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 3. *La classe de Chern d'un fibré en droites holomorphe* π *sur* X *est un entier relatif égal à l'ordre de toute section méromorphe de* π. *En particulier, si la classe de Chern est strictement négative, l'espace vectoriel* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *est nul. Si la classe de Chern est nulle, le fibré* π *est différentiablement trivial. S'il est holomorphiquement trivial, l'espace vectoriel* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *est de dimension* 1, *sinon il est nul.*

Ces résultats sont énoncés ici pour mémoire (chap. I, § 4, lemme 1).

§ 2. PROBLÈMES DE COUSIN

Soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X. Nous avons vu (chap. I, § 3, proposition 2), qu'il existe une suite exacte

$$\mathscr{K}(X, \pi) \xrightarrow{\gamma_I} \mathscr{Q}(X, \pi) \xrightarrow{\delta} \mathbf{H}^1(X, \pi)$$

permettant de trouver sous quelles conditions il existe une section méromorphe de π ayant une partie principale donnée.

Soit u une partie principale de π et soit v une section holomorphe de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$. On vérifie aisément que la classe de (w_x, v_x) dans $\mathscr{Q}(\Omega^{1,0})_x$ ne dépend pas de la section méromorphe w de π représentant u au voisinage de x. On définit ainsi une partie principale de $\Omega^{1,0}$ que l'on désigne par (u, v) et l'on pose

$$\text{Rés}(u, v) = \sum_{x \in X} \text{Rés}\big((u, v), x\big).$$

On a alors la solution suivante au premier problème de Cousin.

THÉORÈME 1. *Soit* π *un fibré vectoriel holomorphe sur* X. *Pour qu'une partie principale* u *de* π *provienne d'une section méromorphe, il faut et il suffit que la forme linéaire* Rés$(u,\ )$ *soit identiquement nulle sur* $\mathscr{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$.

Rappelons tout d'abord la construction de $\delta(u)$ (chap. I, § 3, proposition 2). Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ les points de X pour lesquels le germe u_x

n'est pas nul et par $(U_j)_{0 \leq j \leq n}$ un recouvrement ouvert de X vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout entier j compris entre 1 et n, l'ensemble U_j est le domaine d'une carte ϕ_j centrée au point x_j.

(2) Les ensembles $U_1, ..., U_n$ sont deux à deux disjoints.

(3) L'ensemble U_0 est égal à $X \backslash \{x_1, ..., x_n\}$.

Quitte à diminuer $U_1, ..., U_n$, on peut supposer qu'il existe une section méromorphe u_j de π sur U_j représentant $u|_{U_j}$. On désigne par u_0 la fonction nulle sur U_0. Pour tout entier j compris entre 0 et n, il existe une section s_j de $\mathscr{C}^\infty(U_j, \pi)$ telle que

$$u_k - u_j = s_k - s_j$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). En particulier, les $d''s_j$ se recollent en une section t de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dont la classe dans $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ est précisément $\delta(u)$.

En vertu du théorème de dualité, il suffit de montrer que l'on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X (t, v) = \text{Rés}(u, v)$$

pour toute section holomorphe v de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$.

Les sections $s_j - u_j$ se recollent en une section h de $\mathscr{C}^\infty(U_0, \pi)$ et l'on a

$$d''h = t|_{U_0}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X (t, v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{X \backslash \bigcup\limits_{1 \leq j \leq n} V_{j,\varepsilon}} (d''h, v) = \sum_{1 \leq j \leq n} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{2i\pi} \int_{\partial V_{j,\varepsilon}} (h, v)$$

où $V_{j,\varepsilon}$ désigne le disque de centre x_j et de rayon ε dans ϕ_j. D'autre part, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1}{2i\pi} \int_{\partial V_{j,\varepsilon}} (s_j, v) = 0$$

car s_j est continue au point x_j et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial V_{j,\varepsilon}} (u_j, v) = \text{Rés}((u, v), x_j)$$

ce qui démontre l'assertion.

Exemple 1.

Le genre de $\mathbf{P}^1$ étant nul, toute partie principale u de $\mathbf{C}_{\mathbf{P}^1}$ provient d'une fonction méromorphe, résultat qu'il est d'ailleurs facile de démontrer directement (chap. I, § 5, lemme 2).

Exemple 2.

Supposons que X soit une courbe elliptique. Pour qu'une partie principale u de $\mathbf{C}_X$ provienne d'une fonction méromorphe, il faut et il suffit que l'on ait

$$\text{Rés}\,(u, dz) = 0$$

(§ 1, exemple 2) (que le lecteur se souvienne de la fonction elliptique p de Weierstrass!).

Exemple 3.

Si X est une courbe holomorphe quelconque, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie principale u de $\Omega^{1,0}$ provienne d'une forme différentielle méromorphe est que l'on ait

$$\text{Rés}\,(u, 1) = 0\,.$$

Parmi les formes différentielles méromorphes, on distingue les espèces suivantes:

(1) Les formes différentielles holomorphes ou *formes différentielles abéliennes de première espèce.*

(2) Les formes différentielles méromorphes dont les seules singularités sont des pôles d'ordre au moins 2 à résidu nul ou *formes différentielles abéliennes de deuxième espèce.*

(3) Les formes différentielles méromorphes ayant comme seules singularités un nombre pair de pôles d'ordre 1, groupés deux par deux de résidus opposés, ou *formes différentielles abéliennes de troisième espèce.*

Avant d'aborder le deuxième problème de Cousin pour les courbes holomorphes compactes, il nous faut introduire quelques notions.

Pour toute forme différentielle w de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$, il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota\in I}$ de X et, pour chaque indice ι, une fonction h_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$d''h_\iota = w\,|_{U_\iota}\,.$$

C'est une conséquence immédiate du lemme de Grothendieck (chap. III, § 1, remarque 2). Sur $U_\iota \cap U_\kappa$, la fonction définie par

$$h_{\kappa\iota} = h_\kappa - h_\iota$$

est holomorphe et l'on vérifie aisément que la famille $(g_{\kappa\iota})$ avec

$$g_{\kappa\iota} = \exp(2i\pi h_{\kappa\iota})$$

est un cocycle holomorphe de rang 1 subordonné à $(U_\iota)_{\iota\in I}$ dont la classe dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de la classe de w dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. On obtient ainsi un homomorphisme canonique

$$\theta : \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \to \mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*) .$$

Soit u un diviseur d'ordre 0 sur X. On peut l'écrire sous la forme (chap. I, § 4, lemme 3)

$$u = \sum_{1 \leq j \leq n} y_j - x_j$$

où $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ sont des points de X (non nécessairement distincts).

On appelle *chaîne bordant u* toute famille $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ où c_j est un chemin joignant x_j à y_j dans X.

Le lemme suivant est à rapprocher d'un résultat démontré précédemment (chap. O, § 5, proposition 1).

LEMME 1. *Soit u un diviseur d'ordre 0 sur X et soit $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ une chaîne bordant u. Il existe une forme différentielle w de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) L'image par θ de la classe de w est le fibré principal associé à u.

(2) Pour toute forme différentielle holomorphe v sur X, on a

$$\int_X v \wedge w = \sum_{1 \leq j \leq n} \int_{c_j} v .$$

On se ramène aisément au cas d'un seul chemin c joignant un point z_0 à un point z_1 dans le domaine U_0 d'une carte ϕ de X dont l'image est un disque de $\mathbf{C}$. Il n'y a pas ici de problème de lissage *(loc. cit.)*.

On désigne par W et V deux disques de ϕ tels que W soit relativement compact dans V et V relativement compact dans U_0 et tels que l'image de c soit contenue dans W. Le diviseur u est représenté sur U_0 par la fonction méromorphe

$$u_0(z) = \frac{\phi(z) - \phi(z_1)}{\phi(z) - \phi(z_0)}$$

et sur le complémentaire U_1 de $\overline{V}$ par la fonction constante 1.

Désignons par α une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 sur $X \backslash V$, à 0 sur $\overline{W}$ et par h un logarithme de u_0 sur $U_0 \backslash \overline{W}$. La forme différentielle définie par

$$\begin{cases} w = 0 & \text{sur } (X \backslash U_0) \cup \overline{W} \\ w = \dfrac{1}{2i\pi} d''(\alpha h) & \text{sur } U_0 \backslash \overline{W} \end{cases}$$

appartient à $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$.

La propriété (1) résulte immédiatement des définitions. Pour démontrer (2), on remarque que la restriction de v à U_0 est exacte. On a donc

$$\int_X v \wedge w = \frac{1}{2i\pi} \int_{\overline{V}} v \wedge d''(\alpha h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\overline{V}} df \wedge d(\alpha h)$$

où f est une fonction holomorphe sur U_0. Il résulte alors de la formule de Stokes que l'on a

$$\int_X v \wedge w = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial V} f \frac{du_0}{u_0} = f(z_1) - f(z_0)$$

ce qui démontre l'assertion.

Théorème 2 (Abel). *Pour qu'un diviseur* u *d'ordre* 0 *soit le diviseur d'une fonction méromorphe, il faut et il suffit qu'il existe une chaine* $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ *bordant* u *telle que*

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \int_{c_j} v = 0$$

pour toute forme différentielle holomorphe v *sur* X.

Montrons que la condition est nécessaire. On peut supposer u non nul. On désigne par h une fonction méromorphe sur X dont u est le diviseur, par n le degré de h (chap. I, § 4) et par B l'ensemble des valeurs critiques de h.

Soit c un chemin joignant $(0{:}1)$ à $(1{:}0)$ dans $\mathbf{P}^1$, ne rencontrant pas B, sauf peut-être en ses extrémités. Il existe n chemins distincts $c_1, \ldots, c_n$ relevant c, chacun joignant un pôle de h à un zéro de h. La chaîne $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ borde u et l'on a

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \int_{c_j} v = \int_c h_*(v)$$

(chap. I, § 4, proposition 3). On conclut en remarquant que $h_*(v)$ est nulle (§ 1, exemple 1).

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Désignons par w une forme différentielle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ vérifiant les conditions du lemme 1. La relation

$$\int_X v \wedge w = 0$$

pour toute forme différentielle holomorphe v montre que la classe de w dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ est nulle (théorème de dualité, chap. III, § 2). On en déduit que le fibré principal associé à u est trivial, ce qui démontre le théorème (chap. I, § 3, proposition 3).

§ 3. Théorème de Riemann-Roch

Pour tout fibré vectoriel holomorphe π sur X, les espaces vectoriels complexes $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ et $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ sont de dimension finie (chap. III, § 2, proposition 2, corollaire). On pose

$$\chi(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^1(X, \pi).$$

Le théorème de dualité *(loc. cit.)* montre que l'on a aussi

$$\chi(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}).$$

Proposition 1. *Désignons par π un fibré vectoriel holomorphe de rang p sur X et par ρ un fibré en droites holomorphe associé à un diviseur u de X. On a alors*

$$\chi(\pi \otimes \rho) = \chi(\pi) + p\, 0(u).$$

On se ramène aisément au cas où u est de la forme

$$u = 1 \cdot x$$

pour un certain point x de X. Désignons par s une section holomorphe de ρ ayant u pour diviseur. Le diagramme suivant est commutatif

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(X, \pi) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \rho) \\ {\scriptstyle d''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d''} \\ \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1} \otimes \rho). \end{array}$$

Pour tout fibré vectoriel différentiel σ sur X, le passage aux germes induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{C}^\infty(X, \sigma) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \sigma \otimes \rho) & \to & V(\sigma) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\ 0 & \to & A_x^\infty(\sigma) & \xrightarrow{\otimes s_x} & A_x^\infty(\sigma \otimes \rho) & \to & W(\sigma) & \to & 0 \end{array}$$