

§3. Théorème de Riemann-Roch

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

pour toute forme différentielle holomorphe v montre que la classe de w dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ est nulle (théorème de dualité, chap. III, § 2). On en déduit que le fibré principal associé à u est trivial, ce qui démontre le théorème (chap. I, § 3, proposition 3).

§ 3. THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

Pour tout fibré vectoriel holomorphe π sur X , les espaces vectoriels complexes $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ et $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ sont de dimension finie (chap. III, § 2, proposition 2, corollaire). On pose

$$\chi(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^1(X, \pi).$$

Le théorème de dualité (*loc. cit.*) montre que l'on a aussi

$$\chi(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}).$$

PROPOSITION 1. Désignons par π un fibré vectoriel holomorphe de rang p sur X et par ρ un fibré en droites holomorphe associé à un diviseur u de X . On a alors

$$\chi(\pi \otimes \rho) = \chi(\pi) + p \theta(u).$$

On se ramène aisément au cas où u est de la forme

$$u = 1 \cdot x$$

pour un certain point x de X . Désignons par s une section holomorphe de ρ ayant u pour diviseur. Le diagramme suivant est commutatif

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(X, \pi) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \rho) \\ d'' \downarrow & & \downarrow d'' \\ \mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1} \otimes \rho). \end{array}$$

Pour tout fibré vectoriel différentiel σ sur X , le passage aux germes induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(X, \sigma) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathcal{C}^\infty(X, \sigma \otimes \rho) & \rightarrow & V(\sigma) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \alpha \\ 0 & \rightarrow & A_x^\infty(\sigma) & \xrightarrow{\otimes s_x} & A_x^\infty(\sigma \otimes \rho) & \rightarrow & W(\sigma) \rightarrow 0 \end{array}$$

où $V(\sigma)$ et $W(\sigma)$ désignent les conoyaux de $\otimes s$ et $\otimes s_x$ respectivement. La section s ne s'annulant qu'au point x , les lignes de ce diagramme sont exactes et l'application α est un isomorphisme. Ceci montre que le diagramme (*) se complète en un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(X, \pi) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \rho) & \rightarrow & W(\pi) & \rightarrow 0 \\
 & d'' \downarrow & & d'' \downarrow & & \downarrow \beta & \\
 0 \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1} \otimes \rho) & \rightarrow & W(\pi \otimes \Omega^{0,1}) & \rightarrow 0
 \end{array}$$

On a alors (diagramme du serpent),

$$\chi(\pi) - \chi(\pi \otimes \rho) + \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\beta) - \dim_{\mathbb{C}} \text{Coker}(\beta) = 0$$

et il suffit de vérifier les égalités

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\beta) = p \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{C}} \text{Coker}(\beta) = 0.$$

Ceci étant un problème de germes, on peut supposer que x est l'origine dans \mathbb{C} , que π est le fibré produit de rang p et ρ le fibré produit de rang 1. L'application

$$\beta : (A_0^\infty)^p / s_0 (A_0^\infty)^p \rightarrow (A_0^\infty)^p / s_0 (A_0^\infty)^p$$

étant induite par l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, elle est surjective (chap. III, § 1, remarque 2). D'autre part, pour tout germe u de $(A_0^\infty)^p$ vérifiant la relation

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = s_0 v$$

pour un certain v , on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u - s_0 w) = 0$$

pour un certain w (*loc. cit.*). Le germe $u - s_0 w$ étant holomorphe, il existe un germe h de $(A_0^\infty)^p$ tel que

$$u - s_0 w - u(0) = s_0 h.$$

Ceci montre que le noyau de β est constitué des germes d'applications constantes de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^p ce qui achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE. *Tout fibré en droites holomorphes π sur X est associé à un diviseur.*

Pour tout fibré en droites holomorphes ρ sur X associé à un diviseur u , on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi \otimes \rho) \geq \chi(\pi \otimes \rho) = \chi(\pi) + 0(u).$$

Si l'ordre de u est bien choisi, le fibré $\pi \otimes \rho$ possède une section holomorphe non nulle s . On en déduit que le fibré π est associé au diviseur $(s) - u$.

THÉORÈME 1 (Riemann-Roch). *Pour tout fibré en droites holomorphe π sur X , on a*

$$\chi(\pi) = 1 - g + \text{ch}(\pi)$$

où g désigne le genre de X .

On peut supposer que π est associé à un diviseur u (proposition 1, corollaire). On a donc

$$\chi(\pi) = \chi(\mathbf{C}_X) + 0(u) = 1 - g + \text{ch}(\pi)$$

(proposition 1 et § 1, proposition 3), ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Pour tout fibré en droites holomorphe π sur X , on a la relation*

$$\text{ch}(\pi^* \otimes \Omega^{1,0}) = 2g - 2 - \text{ch}(\pi).$$

En particulier, la classe de Chern du fibré $\Omega^{1,0}$ est égale à $2g - 2$.

Il suffit de remarquer que l'on a

$$\chi(\pi^* \otimes \Omega^{1,0}) = -\chi(\pi) = -(1 - g + \text{ch}(\pi))$$

et d'appliquer le théorème de Riemann-Roch.

PROPOSITION 2. *Pour tout fibré en droites holomorphe π sur X , on a les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{ch}(\pi) < 0 & \Rightarrow \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 0. \\ (2) \quad \text{ch}(\pi) = 0 & \Rightarrow \begin{cases} \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 0 & \text{si } \pi \text{ n'est pas (holo-} \\ & \text{morphiquement) trivial.} \\ \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 & \text{si } \pi \text{ est (holo-} \\ & \text{morphiquement) trivial.} \end{cases} \\ (3) \quad \text{ch}(\pi) = 2g - 2 & \Rightarrow \begin{cases} \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g - 1 & \text{si } \pi \text{ n'est pas iso-} \\ & \text{morphe à } \Omega^{1,0}. \\ \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g & \text{si } \pi \text{ est isomorphe à} \\ & \Omega^{1,0}. \end{cases} \\ (4) \quad \text{ch}(\pi) > 2g - 2 & \Rightarrow \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 - g + \text{ch}(\pi). \end{aligned}$$

Les deux premières assertions ont déjà été démontrées (§ 1, proposition 3). Pour démontrer les deux dernières, il suffit de remarquer que l'on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 - g + \text{ch}(\pi) + \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$$

et d'appliquer ce qui précède au fibré $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$.

Remarque 1.

Pour tout diviseur u sur X , on pose

$$L(u) = \{ h \in \mathcal{K}(X) \mid h = 0 \text{ ou } (h) \geq -u \}$$

$$I(u) = \{ s \in \mathcal{K}(X, \Omega^{1,0}) \mid s = 0 \text{ ou } (s) \geq u \}.$$

Désignons par π un fibré en droites holomorphes associé à u . Nous avons vu que l'espace vectoriel $L(u)$ (resp. $I(u)$) est canoniquement isomorphe à l'espace $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ (resp. $\mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$) (chap. I, § 3). En désignant sa dimension par $l(u)$ (resp. $i(u)$), le théorème de Riemann-Roch prend la forme plus classique suivante:

$$l(u) - i(u) = 1 - g + 0(u).$$

THÉORÈME 2 (Riemann-Hurwitz). *Soient X et Y deux courbes holomorphes compactes connexes de genre $g(X)$ et $g(Y)$ respectivement et soit h une application holomorphe non constante de X dans Y . On a la formule*

$$2g(X) - 2 = \text{deg}(h)(2g(Y) - 2) + v(h)$$

où $v(h)$ désigne l'indice de ramification de h ¹⁾.

Désignons par u une forme différentielle méromorphe non nulle sur Y . On a

$$0(h^*(u)) = \sum_{x \in X} 0_x(h^*(u)) = \sum_{x \in X} (v_x(h) + 1) 0_{h(x)}(u) + v(h)$$

(chap. I, § 4, lemme 2) et par conséquent

$$0(h^*(u)) = \sum_{y \in Y} \left(\sum_{x \in u^{-1}(y)} (v_x(h) + 1) \right) 0_y(u) + v(h) = \text{deg}(h) 0(u) + v(h)$$

et l'on conclut en remarquant que l'ordre de $h^*(u)$ (resp. u) est égal à $2g(X) - 2$ (resp. $2g(Y) - 2$) (théorème 1, corollaire).

COROLLAIRE. *Pour qu'il existe une application holomorphe non constante de X dans Y , il faut que le genre de Y soit au plus égal au genre de X .*

¹⁾ C'est à dire la somme des indices de ramification de h aux différents points de X (chap. I, § 4).