§3. Théorème de Riemann-Roch

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

pour toute forme différentielle holomorphe v montre que la classe de w dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ est nulle (théorème de dualité, chap. III, § 2). On en déduit que le fibré principal associé à u est trivial, ce qui démontre le théorème (chap. I, § 3, proposition 3).

§ 3. Théorème de Riemann-Roch

Pour tout fibré vectoriel holomorphe π sur X, les espaces vectoriels complexes $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ et $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ sont de dimension finie (chap. III, § 2, proposition 2, corollaire). On pose

$$\chi(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^1(X, \pi).$$

Le théorème de dualité *(loc. cit.)* montre que l'on a aussi

$$\chi(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) - \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}).$$

Proposition 1. *Désignons par* π *un fibré vectoriel holomorphe de rang* p *sur* X *et par* ρ *un fibré en droites holomorphe associé à un diviseur* u *de* X. *On a alors*

$$\chi(\pi \otimes \rho) = \chi(\pi) + p\,0(u).$$

On se ramène aisément au cas où u est de la forme

$$u = 1 \cdot x$$

pour un certain point x de X. Désignons par s une section holomorphe de ρ ayant u pour diviseur. Le diagramme suivant est commutatif

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(X, \pi) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \rho) \\ {\scriptstyle d''}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d''} \\ \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1} \otimes \rho). \end{array}$$

Pour tout fibré vectoriel différentiel σ sur X, le passage aux germes induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{C}^\infty(X, \sigma) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \sigma \otimes \rho) & \to & V(\sigma) & \to & 0 \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\ 0 & \to & A_x^\infty(\sigma) & \xrightarrow{\otimes s_x} & A_x^\infty(\sigma \otimes \rho) & \to & W(\sigma) & \to & 0 \end{array}$$

où $V(\sigma)$ et $W(\sigma)$ désignent les conoyaux de $\otimes s$ et $\otimes s_x$ respectivement. La section s ne s'annulant qu'au point x, les lignes de ce diagramme sont exactes et l'application α est un isomorphisme. Ceci montre que le diagramme (*) se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \mathscr{C}^\infty(X, \pi) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \rho) & \to & W(\pi) & \to 0 \\
& d'' \downarrow & & d'' \downarrow & & \downarrow \beta & \\
0 \to & \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) & \xrightarrow{\otimes s} & \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1} \otimes \rho) & \to & W(\pi \otimes \Omega^{0,1}) & \to 0
\end{array}$$

On a alors (diagramme du serpent),

$$\chi(\pi) - \chi(\pi \otimes \rho) + \dim_{\mathbf{C}} \operatorname{Ker}(\beta) - \dim_{\mathbf{C}} \operatorname{Coker}(\beta) = 0$$

et il suffit de vérifier les égalités

$$\dim_{\mathbf{C}} \operatorname{Ker}(\beta) = p \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbf{C}} \operatorname{Coker}(\beta) = 0 .$$

Ceci étant un problème de germes, on peut supposer que x est l'origine dans $\mathbf{C}$, que π est le fibré produit de rang p et ρ le fibré produit de rang 1. L'application

$$\beta : (A_0^\infty)^p / s_0 (A_0^\infty)^p \to (A_0^\infty)^p / s_0 (A_0^\infty)^p$$

étant induite par l'opérateur différentiel $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$, elle est surjective (chap. III, § 1, remarque 2). D'autre part, pour tout germe u de $(A_0^\infty)^p$ vérifiant la relation

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = s_0 v$$

pour un certain v, on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u - s_0 w) = 0$$

pour un certain w *(loc. cit.)*. Le germe $u - s_0 w$ étant holomorphe, il existe un germe h de $(A_0^\infty)^p$ tel que

$$u - s_0 w - u(0) = s_0 h .$$

Ceci montre que le noyau de β est constitué des germes d'applications constantes de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^p$ ce qui achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE. *Tout fibré en droites holomorphes π sur X est associé à un diviseur.*

Pour tout fibré en droites holomorphes ρ sur X associé à un diviseur u, on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi \otimes \rho) \geqslant \chi(\pi \otimes \rho) = \chi(\pi) + 0(u).$$

Si l'ordre de u est bien choisi, le fibré $\pi \otimes \rho$ possède une section holomorphe non nulle s. On en déduit que le fibré π est associé au diviseur $(s) - u$.

THÉORÈME 1 (Riemann-Roch). *Pour tout fibré en droites holomorphe π sur X, on a*

$$\chi(\pi) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi)$$

où g désigne le genre de X.

On peut supposer que π est associé à un diviseur u (proposition 1, corollaire). On a donc

$$\chi(\pi) = \chi(\mathbf{C}_X) + 0(u) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi)$$

(proposition 1 et § 1, proposition 3), ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Pour tout fibré en droites holomorphe π sur X, on a la relation*

$$\mathrm{ch}(\pi^* \otimes \Omega^{1,0}) = 2g - 2 - \mathrm{ch}(\pi).$$

En particulier, la classe de Chern du fibré $\Omega^{1,0}$ est égale à $2g - 2$.

Il suffit de remarquer que l'on a

$$\chi(\pi^* \otimes \Omega^{1,0}) = -\chi(\pi) = -(1 - g + \mathrm{ch}(\pi))$$

et d'appliquer le théorème de Riemann-Roch.

PROPOSITION 2. *Pour tout fibré en droites holomorphe π sur X, on a les relations suivantes :*

(1) $\mathrm{ch}(\pi) < 0 \Rightarrow \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 0.$

(2) $\mathrm{ch}(\pi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 0 & \text{si } \pi \text{ \textit{n'est pas (holomorphiquement) trivial.}} \\ \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 & \text{\textit{si} } \pi \text{ \textit{est (holomorphiquement) trivial.}} \end{cases}$

(3) $\mathrm{ch}(\pi) = 2g - 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g - 1 & \text{\textit{si} } \pi \text{ \textit{n'est pas isomorphe à} } \Omega^{1,0}. \\ \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g & \text{\textit{si} } \pi \text{ \textit{est isomorphe à} } \Omega^{1,0}. \end{cases}$

(4) $\mathrm{ch}(\pi) > 2g - 2 \Rightarrow \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi).$

Les deux premières assertions ont déjà été démontrées (§ 1, proposition 3). Pour démontrer les deux dernières, il suffit de remarquer que l'on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 - g + \mathrm{ch}(\pi) + \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$$

et d'appliquer ce qui précède au fibré $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$.

Remarque 1.

Pour tout diviseur u sur X, on pose

$$L(u) = \{ h \in \mathscr{K}(X) \mid h = 0 \quad \text{ou} \quad (h) \geqslant -u \}$$
$$I(u) = \{ s \in \mathscr{K}(X, \Omega^{1,0}) \mid s = 0 \quad \text{ou} \quad (s) \geqslant u \}.$$

Désignons par π un fibré en droites holomorphes associé à u. Nous avons vu que l'espace vectoriel $L(u)$ (resp. $I(u)$) est canoniquement isomorphe à l'espace $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ (resp. $\mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$) (chap. I, § 3). En désignant sa dimension par $l(u)$ (resp. $i(u)$), le théorème de Riemann-Roch prend la forme plus classique suivante:

$$l(u) - i(u) = 1 - g + 0(u).$$

Théorème 2 (Riemann-Hurwitz). *Soient X et Y deux courbes holomorphes compactes connexes de genre $g(X)$ et $g(Y)$ respectivement et soit h une application holomorphe non constante de X dans Y. On a la formule*

$$2g(X) - 2 = \deg(h)\big(2g(Y) - 2\big) + v(h)$$

où $v(h)$ désigne l'indice de ramification de h [1].

Désignons par u une forme différentielle méromorphe non nulle sur Y. On a

$$0\big(h^*(u)\big) = \sum_{x \in X} 0_x\big(h^*(u)\big) = \sum_{x \in X} \big(v_x(h) + 1\big)\, 0_{h(x)}(u) + v(h)$$

(chap. I, § 4, lemme 2) et par conséquent

$$0\big(h^*(u)\big) = \sum_{y \in Y} \Big(\sum_{x \in u^{-1}(y)} \big(v_x(h) + 1\big)\Big)\, 0_y(u) + v(h) = \deg(h)\, 0(u) + v(h)$$

et l'on conclut en remarquant que l'ordre de $h^*(u)$ (resp. u) est égal à $2g(X) - 2$ (resp. $2g(Y) - 2$) (théorème 1, corollaire).

Corollaire. *Pour qu'il existe une application holomorphe non constante de X dans Y, il faut que le genre de Y soit au plus égal au genre de X.*

[1] C'est à dire la somme des indices de ramification de h aux différents points de X (chap. I, § 4).