

§4. Fibrés amples

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§ 4. FIBRÉS AMPLES

Dans tout ce paragraphe, on désigne par g le genre de X et par π un fibré en droites holomorphes sur X .

Soient s_0, \dots, s_n des sections holomorphes de π dont l'une au moins n'est pas nulle. Pour tout entier j compris entre 0 et n , on pose

$$X_j = \{ x \in X \mid s_j(x) \neq 0 \}$$

et l'on définit une application holomorphe de X_j dans \mathbf{P}^n par la formule

$$\phi_j(x) = \left(\frac{s_0}{s_j}(x) : \dots : \frac{s_n}{s_j}(x) \right).$$

Par définition même, les ϕ_j se recollent en une application holomorphe ϕ de $\bigcup_{0 \leq j \leq n} X_j$ dans \mathbf{P}^n . Pour tout point x de $X \setminus \bigcup_{0 \leq j \leq n} X_j$, il existe un voisinage ouvert U de x , une fonction holomorphe h sur U et des sections holomorphes s'_0, \dots, s'_n de π sur U dont l'une au moins ne s'annule pas au point x , vérifiant les relations suivantes

$$s_0 = h s'_0, \dots, s_n = h s'_n.$$

Supposons par exemple $s'_j(x)$ non nul. On prolonge l'application ϕ en posant

$$\phi(x) = \left(\frac{s'_0}{s'_j}(x) : \dots : \frac{s'_n}{s'_j}(x) \right).$$

L'application holomorphe ϕ de X dans \mathbf{P}^n ainsi obtenue se désigne par $(s_0 : \dots : s_n)$.

On dit que le fibré π est *ample* si pour toute base (s_0, \dots, s_n) de l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \pi)$, l'application $(s_0 : \dots : s_n)$ est un plongement de X dans \mathbf{P}^n .

Remarque 1.

Désignons par h_1, \dots, h_n des fonctions méromorphes sur X dont l'une au moins n'est pas nulle. On définit un diviseur u sur X en posant

$$u = -\inf((h_1), \dots, (h_n), 0).$$

Soit ρ un fibré en droites holomorphes sur X et soit s_0 une section holomorphe de ρ ayant u pour diviseur. Les sections de ρ définies par

$$s_1 = h_1 s_0, \dots, s_n = h_n s_0$$

sont holomorphes et l'une d'entre elles au moins n'est pas nulle. L'application $(s_0: \dots: s_n)$ se désigne (abusivement) par $(h_1: \dots: h_n)$.

PROPOSITION 1. *Si la classe de Chern de π est au moins égale à $2g$, les sections holomorphes de π n'ont pas de zéro commun.*

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un point x de X où toutes les sections holomorphes de π s'annulent. Désignons par ρ un fibré en droites holomorphes sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. L'application

$$\otimes s: \mathbf{H}^0(X, \pi \otimes \rho^*) \rightarrow \mathbf{H}^0(X, \pi)$$

est injective. Elle est surjective en vertu de l'hypothèse faite sur x . D'autre part, la proposition 2 du paragraphe 3 montre que l'on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi \otimes \rho^*) = 1 - g + \text{ch}(\pi \otimes \rho^*) = \text{ch}(\pi) - g$$

et

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = 1 + \text{ch}(\pi) - g$$

ce qui est absurde.

COROLLAIRE 1. *On suppose que la classe de Chern de π est au moins égale à $2g$. Pour tout ensemble fini A de X , il existe une section holomorphe de π qui ne s'annule en aucun point de A .*

Il résulte en effet de la proposition 1 que l'ensemble des sections holomorphes de π qui s'annulent en un point de X forment un hyperplan de $\mathbf{H}^0(X, \pi)$.

COROLLAIRE 2. *On suppose que la classe de Chern de π est au moins égale à $2g + 1$.*

(1) *Pour tout couple (x, y) de points distincts de X , il existe une section holomorphe de π qui s'annule au point x et ne s'annule pas au point y .*

(2) *Pour tout point x de X , il existe une section holomorphe de π qui possède un zéro simple au point x .*

On désigne par ρ un fibré en droites holomorphes sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. La classe de Chern du fibré $\pi \otimes \rho^*$ est au moins égale à $2g$ et la proposition 1 montre qu'il existe une section holomorphe t de ce fibré qui ne s'annule pas au point y (resp. x). La section $t \otimes s$ vérifie la condition (1) (resp. (2)).

THÉORÈME 1. *Si sa classe de Chern est au moins égale à $2g + 1$, le fibré π est ample.*

Désignons par (s_0, \dots, s_n) une base de $\mathbf{H}^0(X, \pi)$. Pour tout couple (x, y) de points de X , il existe un entier j compris entre 0 et n tel que s_j ne s'annule pas sur $\{x, y\}$ (proposition 1, corollaire 1). Par définition, la relation

$$(s_0 : \dots : s_n)(x) = (s_0 : \dots : s_n)(y)$$

signifie qu'il existe un nombre complexe λ non nul tel que

$$\left(\frac{s_0}{s_j}(x), \dots, \frac{s_n}{s_j}(x) \right) = \lambda \left(\frac{s_0}{s_j}(y), \dots, \frac{s_n}{s_j}(y) \right).$$

Ceci n'est possible que si x et y coïncident (proposition 1, corollaire 2) et par conséquent l'application $(s_0 : \dots : s_n)$ est injective.

Il reste à montrer qu'elle est de rang 1. Désignons par x un point de X et par s une section holomorphe de π possédant un zéro simple au point x (*loc. cit.*). On a

$$s = \lambda_0 s_0 + \dots + \lambda_n s_n$$

et il existe un entier j compris entre 0 et n tel que $s_j(x)$ soit non nul. On a donc

$$\frac{s}{s_j} = \lambda_0 \frac{s_0}{s_j} + \dots + \lambda_n \frac{s_n}{s_j}$$

et par conséquent

$$d \left(\frac{s}{s_j} \right)(x) = \lambda_0 d \left(\frac{s_0}{s_j} \right)(x) + \dots + \lambda_n d \left(\frac{s_n}{s_j} \right)(x).$$

Le membre de gauche étant non nul, il existe un entier k compris entre 0 et n tel que $d \frac{s_k}{s_j}(x)$ soit non nul ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. *Toute courbe holomorphe compacte connexe de genre g se plonge dans \mathbf{P}^{g+1} . En particulier, toute courbe holomorphe compacte connexe de genre 0 est isomorphe à \mathbf{P}^1 et toute courbe elliptique se plonge dans \mathbf{P}^2 .*

Il suffit d'appliquer le théorème 1 au fibré en droites holomorphe associé à un diviseur d'ordre $2g + 1$ et de remarquer que l'on a alors

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi) = g + 2$$

(§ 3, proposition 2).