

# §5. Le corps des fonctions méromorphes

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§ 5. LE CORPS DES FONCTIONS MÉROMORPHES

LEMME 1. Soient  $x_1, \dots, x_n$  des points distincts de  $X$  et soit  $r$  un entier compris entre 0 et  $n$ . Il existe une fonction méromorphe  $f$  sur  $X$  vérifiant les conditions suivantes :

(1) Les points  $x_1, \dots, x_n$  appartiennent au domaine de régularité de  $f$ .

(2) Les nombres complexes  $f(x_1), \dots, f(x_r)$  sont deux à deux distincts et non nuls.

(3) L'ordre de  $f$  aux points  $x_{r+1}, \dots, x_n$  est égal à 1.

Soit  $x_0$  un point de  $X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ . Pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $r$ , on définit un diviseur  $u_j$  sur  $X$  en posant

$$\begin{cases} u_j(x_k) = 1 & \text{pour } 1 \leq k \leq n \text{ et } k \neq j \\ u_j(x_0) = 2g + 1 - n \\ u_j(x) = 0 & \text{pour } x \in X \setminus \{x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n\}. \end{cases}$$

Désignons par  $\pi$  un fibré en droites holomorphes sur  $X$  et par  $s_j$  une section méromorphe de  $\pi$  dont le diviseur est  $u_j$ . Puisque la classe de Chern de  $\pi$  est égale à  $2g$ , il existe une section holomorphe  $t_j$  de  $\pi$  qui ne s'annule en aucun des points  $x_1, \dots, x_n$  (§ 4, proposition 1, corollaire 1). La fonction méromorphe définie par

$$f_j = \frac{s_j}{t_j}$$

est régulière en chacun des points  $x_1, \dots, x_n$ . Elle est non nulle au point  $x_j$  et possède un zéro simple en chacun des points  $x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n$ . Il suffit alors de prendre pour  $f$  une combinaison linéaire convenable des fonctions  $f_1, \dots, f_r$ .

Nous allons étudier le corps  $\mathcal{K}(X)$  des fonctions méromorphes sur  $X$ . Toute fonction méromorphe non constante  $f$  sur  $X$  permet d'identifier le corps  $\mathcal{K}(\mathbf{P}^1)$  des fonctions méromorphes sur  $\mathbf{P}^1$  au sous-corps  $\mathbf{C}(f)$  de  $\mathcal{K}(X)$  engendré par  $f$  (chap. I, § 5, lemme 2).

LEMME 2. Soit  $f$  une fonction méromorphe non constante de degré  $r$  sur  $X$ . Pour toute fonction méromorphe  $g$  sur  $X$  il existe un polynôme  $p$  de degré  $r$  dans  $\mathbf{C}(f)[T]$  tel que  $p(g)$  soit identiquement nulle. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Le polynôme  $p$  est irréductible.

(2) *Le discriminant de  $p$  est non nul.*

(3) *Il existe une valeur régulière  $y$  de  $f$  telle que  $g$  sépare les points de  $f^{-1}(y)$ .*

On désigne par  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  les fonctions symétriques élémentaires à  $r$  indéterminées. Les fonctions  $f_{\sigma_1}(g), \dots, f_{\sigma_r}(g)$  sont méromorphes sur  $\mathbf{P}^1$  (chap. I, § 4, proposition 2). Il suffit alors de poser

$$p = T^r + f_{\sigma_1}(g) T^{r-1} + \dots + f_{\sigma_r}(g).$$

Pour démontrer la seconde assertion, il suffit de montrer que (3) implique (1). Supposons que l'on ait

$$p = p_1 p_2$$

avec  $p_1$  et  $p_2$  dans  $\mathbf{C}(f)[T]$ . L'une au moins des fonctions méromorphes  $p_1(g)$  ou  $p_2(g)$  est identiquement nulle. Désignons par  $y$  une valeur régulière de  $f$  telle que  $g$  sépare les points de  $f^{-1}(y)$ . On peut supposer que les coefficients de  $p_1$  et  $p_2$  sont holomorphes au voisinage de  $y$ . Si  $p_1(g)$  est identiquement nulle, le polynôme  $p_1(y, T)$  a  $r$  racines distinctes, il est donc de degré  $r$  ce qui démontre l'assertion.

LEMME 3. *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions méromorphes sur  $X$ . On suppose que  $f$  est non constante de degré  $r$  et qu'il existe un polynôme irréductible  $p$  de degré  $r$  dans  $\mathbf{C}(f)[T]$  tel que  $p(g)$  soit identiquement nulle. Pour toute fonction méromorphe  $h$  sur  $X$ , il existe un polynôme  $q$  de degré au plus  $r - 1$  dans  $\mathbf{C}(f)[T]$  tel que  $h$  soit égal à  $q(g)$ .*

*En particulier, le corps  $\mathcal{K}(X)$  est engendré par  $f$  et  $g$ .*

Pour toute valeur régulière  $y$  de  $f$  telle que  $f^{-1}(y)$  ne contienne ni pôles de  $g$  ni pôles de  $h$ , on pose

$$a(y, T) = p(y, T) \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{h(x)}{T - g(x)}.$$

Le polynôme  $a$  appartient à  $\mathbf{C}(f)[T]$  (chap. I, § 4, proposition 2). Si  $g$  sépare les points de  $f^{-1}(y)$ , on a

$$h(x) = \frac{a(y, g(x))}{p'(y, g(x))}$$

pour tout point  $x$  de  $f^{-1}(y)$ , en désignant par  $p'$  le polynôme dérivé  $\frac{\partial p}{\partial T}$  (lemme 2). Le principe du prolongement analytique montre que l'on a

$$h = \frac{a(g)}{p'(g)}.$$

Comme  $p$  est irréductible, il existe des polynômes  $a_1$  et  $a_2$  de  $\mathbf{C}(f)[T]$  tels que

$$a = a_1 p' + a_2 p$$

(appendice III). On en déduit que l'on a

$$h = a_1(g)$$

et il suffit d'éliminer les termes de degré supérieur à  $r$  au moyen de la relation

$$p(g) = 0.$$

**THÉORÈME 1.** *Il existe une courbe algébrique projective  $Y$  dans  $\mathbf{P}^2$  et une application holomorphe  $\pi$  de  $X$  dans  $\mathbf{P}^2$  vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *Le couple  $(X, \pi)$  est une normalisation de  $Y$ .*

(2) *L'application  $\pi^*$  induit un isomorphisme de  $\kappa(Y)$  sur  $\mathcal{K}(X)$ .*

Soit  $f$  une fonction méromorphe non constante de degré  $r$  sur  $X$  et soit  $y$  une valeur régulière de  $f$ . Il existe une fonction méromorphe  $g$  sur  $X$  séparant les points de  $f^{-1}(y)$  (lemme 1) et un polynôme irréductible  $p$  de degré  $m$  dans  $\mathbf{C}[T_1, T_2]$  tel que  $p(f, g)$  soit nulle (lemme 2). On définit un polynôme homogène irréductible de degré  $m$  dans  $\mathbf{C}[T_0, T_1, T_2]$  en posant

$$\tilde{p}(T_0, T_1, T_2) = T_0^m p\left(\frac{T_1}{T_0}, \frac{T_2}{T_0}\right).$$

On désigne par  $Y$  le lieu des zéros de  $\tilde{p}$  dans  $\mathbf{P}^2$  et par  $\pi$  l'application holomorphe  $(f:g)$  de  $X$  dans  $\mathbf{P}^2$  (§ 4, remarque 1).

Pour démontrer la première assertion, il suffit de vérifier que  $\pi$  induit un isomorphisme de  $X \setminus \pi^{-1}(A)$  sur  $Y \setminus A$ , en désignant par  $A$  l'ensemble des points singuliers de  $Y$  (chap. I, § 5, lemme 10). Or cette application est propre et holomorphe, elle est de degré 1 par construction. Ceci démontre l'assertion.

La seconde assertion est une conséquence immédiate du lemme 3.

**COROLLAIRE 1.** *Pour que deux courbes holomorphes compactes connexes  $X$  et  $Y$  soient isomorphes, il faut et il suffit que les corps  $\mathcal{K}(X)$  et  $\mathcal{K}(Y)$  soient isomorphes.*

C'est une conséquence immédiate de l'unicité de la normalisation d'une courbe algébrique projective.

COROLLAIRE 2. *Toute courbe holomorphe compacte connexe  $X$  plongée dans un espace projectif  $\mathbf{P}^n$  est le lieu des zéros d'une famille de polynômes homogènes.*

Désignons par  $\underline{a}$  l'idéal des polynômes de  $\mathbf{C}[T_0, \dots, T_n]$  qui s'annulent sur  $\psi^{-1}(X)$ , où  $\psi$  est la projection canonique de  $\mathbf{C}^{n+1} \setminus 0$  dans  $\mathbf{P}^n$ , et par  $Y$  le lieu des zéros de  $\underline{a}$  dans  $\mathbf{P}^n$ . Puisque  $\psi^{-1}(X)$  est connexe, l'idéal  $\underline{a}$  est premier. Le corps  $\kappa(Y)$  des fonctions rationnelles sur  $Y$  est un sous-corps de  $\mathcal{K}(X)$ . Le théorème 1 montre alors que  $Y$  est une courbe algébrique de  $\mathbf{P}^n$ . Désignons par  $Y_0$  l'ensemble des points réguliers de  $Y$  et posons

$$X_0 = Y_0 \cap X.$$

L'ensemble  $X_0$  est à la fois ouvert et fermé dans  $Y_0$ . Comme ce dernier ensemble est connexe (chap. I, § 5, théorème 4), on en déduit que  $X$  est égal à  $Y$ , d'où l'assertion.

THÉORÈME 2. *Toute courbe holomorphe compacte connexe  $X$  se plonge dans  $\mathbf{P}^3$ .*

Soit  $f$  une fonction méromorphe non constante de degré  $r$  sur  $X$ . On désigne par  $y$  une valeur régulière de  $f$ , par  $x_1, \dots, x_r$  les points de  $f^{-1}(y)$ , par  $x_{r+1}, \dots, x_n$  les points critiques de  $f$ . Il existe une fonction méromorphe  $g$  sur  $X$  séparant les points  $x_1, \dots, x_r$  et possédant un zéro simple aux points  $x_{r+1}, \dots, x_n$  (lemme 1). Désignons par  $\pi$  l'application  $(f:g)$  de  $X$  dans  $\mathbf{P}^2$  et par  $Y$  son image. L'application  $\pi$  est partout de rang 1 et le couple  $(X, \pi)$  est une normalisation de  $Y$  (théorème 1). Soit  $A$  l'ensemble des points singuliers de  $Y$  et soit  $h$  une fonction méromorphe sur  $X$  séparant les points de  $\pi^{-1}(A)$  (lemme 1). On montre aisément que l'application  $(f:g:h)$  est un plongement de  $X$  dans  $\mathbf{P}^3$ .

## § 6. FORMES AUTOMORPHES

Pour tout automorphisme  $\gamma$  du disque unité  $\mathbf{D}$ , on définit une fonction holomorphe sur  $\mathbf{D}$  en posant

$$J_\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

Pour tout couple  $(\gamma, \gamma')$  d'automorphismes et tout point  $z$  de  $\mathbf{D}$ , on a

$$j_{\gamma'\gamma}(z) = j_{\gamma'}(\gamma z) j_\gamma(z).$$