Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: §7. Variétés de Picard et de Jacobi
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sinon q est au plus égal à $\dfrac{m-1}{l}$ et l'on a

$$\left[m\left(1-\frac{1}{l}\right)\right] = m-q-1 \geqslant m-1-\frac{m-1}{l} = (m-1)\left(1-\frac{1}{l}\right)$$

ce qui établit l'assertion.

On en déduit que

$$\begin{aligned} 0(a_m) &= m(2g-2) + \sum_{x\in X}\left[m\left(1-\frac{1}{\rho_x}\right)\right] \\ &\geqslant m(2g-2) + (m-1)\sum_{x\in X}\left(1-\frac{1}{\rho_x}\right) \end{aligned}$$

ou encore

$$0(a_m) \geqslant (m-1)\left(2g-2+\sum_{x\in X}\left(1-\frac{1}{\rho_x}\right)\right) + 2g-2\,.$$

Si m est au moins égal à 2, le résultat est donc une conséquence du lemme 3

§ 7. Variétés de Picard et de Jacobi

Désignons par E un espace vectoriel complexe de dimension finie n et par Γ un réseau de E (i.e. un sous-groupe abélien de rang $2n$). L'application canonique π de E dans E/Γ est un revêtement. On munit E/Γ de l'unique structure holomorphe faisant de π un isomorphisme local. On appelle *tore complexe* toute variété holomorphe isomorphe à une variété de la forme E/Γ.

Soit T (resp. T') un tore complexe de la forme E/Γ (resp. E'/Γ') et soit u un isomorphisme de T sur T'. On désigne par π (resp. π') l'application canonique de E dans T (resp. de E' dans T'). Quitte à modifier u par un automorphisme de T', on peut supposer que l'on a

$$u(\pi(0)) = \pi'(0)\,.$$

Il existe alors un isomorphisme v de E sur E' et un seul tel que

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad \pi'\cdot v = u\cdot\pi\,.$$

Pour tout élément γ de Γ, l'image $v(\gamma)$ est un élément γ' de Γ' et l'on vérifie aisément que l'on a

$$v(z+\gamma) = v(z) + \gamma'$$

pour tout point z de E. En particulier, la dérivée de v est Γ-invariante. Elle est donc constante en vertu du principe du maximum.

Il résulte de ce qui précède que T et T' sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire v de E sur E' tel que

$$v(\Gamma) = \Gamma'$$

(chap. I, § 5, numéro 3).

LEMME 1. *Désignons par Ω une matrice de $M(n, 2n; \mathbf{C})$ et par Γ le sous-groupe de $\mathbf{C}^n$ engendré par les vecteurs colonnes de Ω. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Le sous-groupe Γ est un réseau de $\mathbf{C}^n$.

(2) La matrice $\left(\frac{\Omega}{\overline{\Omega}}\right)$ est inversible.

(3) Le vecteur nul est le seul vecteur $(z_1, \ldots, z_n)$ de $\mathbf{C}^n$ tel que le vecteur

$$(z_1, \ldots, z_n)\,\Omega$$

soit réel.

La démonstration est un simple exercice d'algèbre linéaire.

LEMME 2. *Désignons par Ω (resp. Ω') une matrice de $M(n, 2n; \mathbf{C})$ et par Γ (resp. Γ') le sous-groupe de $\mathbf{C}^n$ engendré par les vecteurs colonnes de Ω (resp. Ω'). On suppose que Γ et Γ' sont des réseaux. Pour que les tores complexes $\mathbf{C}^n/\Gamma$ et $\mathbf{C}^n/\Gamma'$ soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe une matrice M de $G(n; \mathbf{C})$ et une matrice Λ de $G(2n; \mathbf{Z})$ telles que*

$$\Omega' = M\,\Omega\,\Lambda\,.$$

C'est une conséquence immédiate de ce qui précède.

Rappelons que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0}) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \longrightarrow 0$$

(§ 1, proposition 2). On sait d'autre part que $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ s'identifie à un sous-espace vectoriel réel de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$.

LEMME 3. *Par restriction, l'application β induit un isomorphisme $\mathbf{R}$-linéaire de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ sur $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$.*

Toute forme différentielle (réelle) de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ s'écrit

$$u = v + \overline{v}$$

avec v dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0})$. En effet, pour toute carte ϕ de domaine U dans X, on a

$$u|_U = u_1 d\phi_1 + u_2 d\phi_2 ,$$

en désignant par ϕ_1 et ϕ_2 les parties réelle et imaginaire de ϕ. Il suffit alors de poser

$$v|_U = \frac{1}{2}(u_1 - iu_2)\, d\phi \qquad \text{et} \qquad \bar{v}|_U = \frac{1}{2}(u_1 + iu_2)\, d\bar{\phi} .$$

Supposons de plus u fermée. L'image par β de la classe de u n'est autre que la classe de $\bar{v}$. Si cette classe est nulle, on a

$$u = v + \bar{v} = d'\bar{f} + d''f$$

pour une certaine fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. Il résulte de cette équation que la fonction $f - \bar{f}$ est harmonique, donc constante. On en déduit que

$$u = d'f + d''f = df$$

ce qui démontre l'assertion.

Il résulte en particulier du lemme 3 que l'image par β du sous-groupe $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ est un réseau de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ (chap. 0, § 5, théorème 1, corollaire 2). Notons que l'image par β de la classe d'un élément h de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ est la classe de la différentielle

$$\frac{1}{2i\pi}\frac{d''h}{h} .$$

PROPOSITION 1. *La suite de groupes abéliens et d'homomorphismes*

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*) \xrightarrow{\mathrm{ch}} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

est exacte [1]).

Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$, il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et, pour chaque indice ι, une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$u|_{U_\iota} = d''f_\iota .$$

Les fonctions définies sur $U_\iota \cap U_\kappa$ par

$$f_{\kappa\iota} = f_\kappa - f_\iota \qquad \text{et} \qquad g_{\kappa\iota} = \exp(2i\pi f_{\kappa\iota})$$

sont holomorphes et la famille $(g_{\kappa\iota})$ est un cocycle de rang 1 subordonnée à (U_ι) dont la classe dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ est précisément l'image par θ de la

[1]) La définition de θ a été donnée au paragraphe 2.

classe de u. Désignons par π un fibré en droites holomorphe sur X correspondant à ce cocycle. Les fonctions $\exp(2i\pi f_\iota)$ se recollent en une section partout non nulle f de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ ce qui montre déjà que la classe de Chern de π est nulle.

Si u est de la forme

$$u = \frac{1}{2i\pi}\frac{d''h}{h}$$

pour une certaine fonction h de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$, la section $h^{-1}f$ de π est holomorphe et partout non nulle ce qui montre que π est trivial.

Réciproquement, si π est trivial, il existe pour tout indice ι une fonction holomorphe inversible g_ι sur U_ι telle que

$$g_\kappa = g_{\kappa\iota}\, g_\iota .$$

Les fonctions $\exp(2i\pi f_\iota)\, g_\iota^{-1}$ se recollent en une fonction h de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ et l'on a

$$\left.\frac{1}{2i\pi}\frac{d''h}{h}\right|_{U_\iota} = d''f_\iota = u\,|_{U_\iota} .$$

Ceci montre que la classe de u est dans l'image de β.

Il reste à voir que tout fibré en droites holomorphe π sur X dont la classe de Chern est nulle provient d'un élément de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. Désignons par $(U_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement ouvert de X par des ensembles simplement connexes et par $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle holomorphe de rang 1 subordonné à (U_ι), représentant π. Le fibré π étant différentiablement trivial (chap. 0, § 5, théorème 4), il existe pour tout indice ι une fonction g_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C}^*)$ telle que

$$g_\kappa = g_{\kappa\iota} g_\iota .$$

Puisque U_ι est simplement connexe, il existe une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$g_\iota = \exp(2i\pi f_\iota) .$$

Il résulte de ces définitions que l'on a

$$d''f_\iota = \frac{1}{2i\pi}\frac{d''g_\iota}{g_\iota} = \frac{1}{2i\pi}\frac{d''g_\kappa}{g_\kappa} = d''f_\kappa .$$

Autrement dit, les formes différentielles $d''f_\iota$ se recollent en une forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ ayant toutes les propriétés requises.

Le noyau de ch s'identifie au quotient de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ par le réseau $\mathrm{Im}\beta$. Ce noyau est donc un tore complexe de dimension g que l'on appelle la *variété de Picard de* X et que l'on désigne par $\mathbf{Pic}(X)$.

Désignons par G le groupe fondamental de X en un point base x_0 et par $c_1, \ldots, c_{2g}$ des lacets de X en x_0 dont les classes forment une base du $\mathbf{Z}$-module libre $\tilde{G}$ (chap. 0, § 5, théorème 3).

Pour tout entier j compris entre 1 et $2g$, il existe par dualité un élément u_j de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ tel que

$$\int_{c_k} u_j = \delta_{jk}$$

pour tout entier k compris entre 1 et $2g$ (chap. 0, § 5, théorème 2, corollaire 2).

Désignons encore par $v_1, \ldots, v_g$ une base de l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ des formes différentielles holomorphes. On pose

$$\omega_{jk} = \int_{c_k} v_j \quad \text{et} \quad \Omega = (\omega_{jk})_{1 \leq j \leq g, 1 \leq k \leq 2g}.$$

Remarquons que l'on a par définition

$$v_j = \sum_{1 \leq k \leq 2g} \omega_{jk} u_k .$$

Autrement dit, la matrice ${}^t\Omega$ est la matrice de l'application α exprimée dans les bases $v_1, \ldots, v_g$ et $u_1, \ldots, u_{2g}$.

LEMME 4. *Les vecteurs colonnes de* Ω *engendrent un réseau de* $\mathbf{C}^g$.

Tout vecteur $(z_1, \ldots, z_g)$ de $\mathbf{C}^g$ tel que le vecteur

$$(z_1, \ldots, z_g)\,\Omega$$

soit réel est nul. En effet, cette condition signifie que la forme différentielle holomorphe

$$z_1 v_1 + \ldots + z_g v_g$$

est réelle. L'assertion est donc une conséquence des lemmes 3 et 1.

Le tore complexe de dimension g défini par la matrice Ω s'appelle la *variété de Jacobi de* X et se désigne par $\mathbf{Jac}(X)$. On notera que cette variété est définie à isomorphisme près par le choix d'une base de $\tilde{G}$ et d'une base de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$.

Pour tout couple (j, k) d'entiers compris entre 1 et $2g$, on pose

$$\lambda_{jk} = \int_X u_j \wedge u_k \quad \text{et} \quad \Lambda = (\lambda_{jk})_{1 \leq j,k \leq 2g}.$$

La matrice Λ n'est autre que la matrice d'intersection de X (chap. 0, § 5, remarque 3). Elle appartient donc à $G(2g; \mathbf{Z})$.

THÉORÈME 1 (Riemann). *(1) La matrice $\Omega\Lambda{}^t\Omega$ est nulle (égalités de Riemann).*

(2) La matrice hermitienne $i\Omega\Lambda{}^t\overline{\Omega}$ est positive non dégénérée (inégalités de Riemann).

Conservons les notations précédentes. Pour tout couple d'entiers (j, k) compris entre 1 et g, la forme différentielle $v_j \wedge v_k$ est identiquement nulle (puisque de bidegré (2, 0)). On a donc

$$0 = \int_X v_j \wedge v_k = \sum_{1 \leq p,q \leq 2g} \omega_{jp}\, \omega_{kq} \int_X u_p \wedge u_q = \sum_{1 \leq p,q \leq 2g} \omega_{jp}\, \lambda_{pq}\, \omega_{kq}$$

ce qui démontre la première assertion.

Pour toute forme différentielle holomorphe v sur X, la forme différentielle $iv \wedge \overline{v}$ est positive (ceci se vérifie aisément dans une carte). Désignons par $z_1, \ldots, z_g$ les coordonnées de v dans la base $v_1, \ldots, v_g$. Les formes différentielles $u_1, \ldots, u_{2g}$ étant réelles, on a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant i \int_X v \wedge \overline{v} &= \sum_{1 \leq j,k \leq g} z_j \overline{z}_k\, i \int_X v_j \wedge \overline{v}_k \\ &= \sum_{1 \leq j,k \leq g} \sum_{1 \leq p,q \leq 2g} i z_j \omega_{jp} \lambda_{pq} \overline{\omega}_{kq} \overline{z}_k \end{aligned}$$

L'égalité ne pouvant apparaître que si v est nulle, ceci démontre la seconde assertion.

Désignons par Ω' la matrice de β dans la base $u_1, \ldots, u_{2g}$ et dans une base quelconque de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. Cette matrice est de rang g et l'on a

$$\Omega' \cdot {}^t\Omega = 0\,.$$

De plus, les vecteurs colonnes de Ω' engendrent un réseau de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ et le quotient de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ par ce réseau n'est autre que $\mathbf{Pic}(X)$ (en effet, les vecteurs colonnes de Ω' sont les images par β des éléments $u_1, \ldots, u_{2g}$).

LEMME 5. *Les variétés* $\mathbf{Pic}(X)$ *et* $\mathbf{Jac}(X)$ *sont isomorphes.*

Posons

$$P = i\,\Omega\Lambda{}^t\overline{\Omega} \quad \text{et} \quad Q = \Omega'{}^t\overline{\Omega}\,.$$

La matrice P est inversible (inégalités de Riemann). Montrons qu'il en est de même de Q. Les égalités de Riemann montrent que l'on a

$$\Omega' {}^t\begin{pmatrix}\Omega\\ \overline{\Omega}\end{pmatrix} = (\Omega' {}^t\Omega \;\; \Omega' {}^t\overline{\Omega}) = (0 \;\; \Omega' {}^t\overline{\Omega})$$

d'où l'assertion puisque Ω' est de rang g et $({}^t\Omega \;\; {}^t\overline{\Omega})$ de rang $2g$. On a alors

$$\begin{pmatrix}\Omega'\\ \overline{\Omega'}\end{pmatrix} {}^t\begin{pmatrix}\Omega\\ \overline{\Omega}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Omega'\\ \overline{\Omega'}\end{pmatrix} ({}^t\Omega \;\; {}^t\overline{\Omega}) = \begin{pmatrix}0 & Q\\ \overline{Q} & 0\end{pmatrix}$$

et par conséquent

$${}^t\begin{pmatrix}\Omega\\ \overline{\Omega}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & \overline{Q}^{-1}\\ Q^{-1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Omega'\\ \overline{\Omega'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{Q}^{-1}\,\overline{\Omega'}\\ Q^{-1}\,\Omega'\end{pmatrix}$$

Posons

$$M = iQP^{-1}.$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$M\Omega\Lambda = M\Omega\Lambda({}^t\Omega \;\; {}^t\overline{\Omega})\begin{pmatrix}\overline{Q}^{-1}\,\overline{\Omega'}\\ Q^{-1}\,\Omega'\end{pmatrix} = M(0 \;\; -iP)\begin{pmatrix}\overline{Q}^{-1}\,\overline{\Omega'}\\ Q^{-1}\,\Omega'\end{pmatrix} = \Omega'$$

ce qui démontre l'assertion.

Notons qu'un isomorphisme υ de **Jac** (X) sur **Pic** (X) est induit par l'isomorphisme de $\mathbf{C}^g$ sur lui-même associé à la matrice M.

Pour tout point x de X, on désigne par ξ_x le fibré principal associé au diviseur $1 \cdot x$. On définit une application Ξ de X dans **Pic** (X) en posant

$$\Xi(x) = \xi_x \xi_{x_0}^{-1}.$$

Par définition même, la classe dans **Jac** (X) du vecteur

$$(\textstyle\int_c v_1, \ldots, \int_c v_g)$$

ne dépend pas du chemin c joignant x_0 à x. Cette classe se désigne par $Y(x)$. On définit ainsi une application Y de X dans **Jac** (X).

Lemme 6. *Le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "Y"'] \arrow[dr, "\Xi"] & \\ \mathbf{Jac}\,(X) \arrow[rr, "\upsilon"] & & \mathbf{Pic}\,(X) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Soit c un chemin joignant x_0 à un point x de X. Le fibré principal $\Xi(x)$ est associé au diviseur $1 \cdot x - 1 \cdot x_0$. Il existe donc une forme différentielle w dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) L'image par θ de la classe de w est le fibré principal $\Xi(x)$.

(2) Pour toute forme différentielle holomorphe v sur X, on a

$$\int_X v \wedge w = \int_c v$$

(§ 2, lemme 1). Il existe d'autre part une fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que la forme $w + d''f$ soit fermée (§ 1, proposition 1). On a alors

$$w + d''f = \sum_{1 \leq j \leq 2g} w_j u_j$$

où $w_1, \ldots, w_{2g}$ sont des nombres complexes. Pour tout entier j compris entre 1 et g, on a

$$\int_c v_j = \int_X v_j \wedge w = \int_X v_j \wedge (w + d''f) = \sum_{1 \leq k \leq 2g} w_k \int_X v_j \wedge u_k$$
$$= \sum_{1 \leq k, l \leq 2g} w_k \omega_{jl} \lambda_{lk}$$

Ceci montre que $Y(x)$ est la classe dans $\mathbf{Jac}(X)$ du vecteur $\Omega\Lambda(w + d''f)$. Avec les notations du lemme 5, on a donc

$$\Omega\Lambda(w + d''f) = \Omega\Lambda({}^t\Omega \; {}^t\overline{\Omega}) \begin{pmatrix} \overline{Q}^{-1}\,\overline{\Omega}' \\ Q^{-1}\,\Omega' \end{pmatrix} (w + d''f)$$
$$= (0 \quad -iP) \begin{pmatrix} \overline{Q}^{-1}\,\overline{\Omega}' \\ Q^{-1}\,\Omega' \end{pmatrix} (w + d''f) = M^{-1}\Omega'(w + d''f)$$

et l'on conclut en remarquant que la classe de $\Omega'(w + d''f)$ dans $\mathbf{Pic}(X)$ n'est autre que $\Xi(x)$.

LEMME 7. *Soit π un fibré en droites holomorphe sur X associé à un diviseur de la forme $1 \cdot x$. Si g est au moins égal à 1, la dimension de $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ est égale à 1.*

Supposons qu'il existe deux sections holomorphes s_0 et s_1 de π linéairement indépendantes et considérons l'application holomorphe $(s_0 : s_1)$ de X dans $\mathbf{P}^1$. Pour tout couple (λ_0, λ_1) de nombres complexes non tous deux nuls, la section $\lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ possède un zéro et un seul. En effet, son ordre est égal à la classe de Chern de π. On en déduit aisément que l'application $(s_0 : s_1)$ est un isomorphisme (chap. I, § 4, proposition 1, corollaire), ce qui démontre l'assertion.

LEMME 8. *Si g est au moins égal à 1, les formes différentielles holomorphes sur X n'ont pas de zéro commun.*

Pour tout point x de X il existe un fibré en droites holomorphe π sur X et une section holomorphe s de π dont le diviseur associé est $1 \cdot x$. Il résulte du théorème de Riemann-Roch et du lemme 7 que l'on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0 (X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) = g - 1 .$$

D'autre part, l'application $\otimes s$ induit un isomorphisme de $\mathbf{H}^0 (X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ sur l'espace $L(1 \cdot x)$ des formes différentielles holomorphes qui s'annulent au point x. On en déduit que $L(1 \cdot x)$ est distinct de $\mathbf{H}^0 (X, \Omega^{1,0})$ ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 2. *Si g est au moins égal à 1, l'application canonique Ξ de X dans* **Pic** (X) *est un plongement.*

Conservons les notations précédentes. Soit U un ensemble ouvert simplement connexe dans X. Il existe des fonctions holomorphes $h_1, \ldots, h_g$ sur U telles que

$$v_1 |_U = dh_1, \ldots, v_g |_U = dh_g .$$

L'application holomorphe $(h_1, \ldots, h_g)$ de U dans $\mathbf{C}^g$ est un relèvement de $Y|_U$. Ceci montre déjà que Y (et par conséquent Ξ) est holomorphe et de rang 1 (lemme 8).

Montrons que Ξ est injective. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux points distincts x et y de X tels que ξ_x et ξ_y coïncident. Désignons par π un fibré en droites holomorphe correspondant au fibré principal ξ_x. La dimension de $\mathbf{H}^0 (X, \pi)$ est au moins égale à 2 ce qui est absurde (lemme 7).

COROLLAIRE. *Toute courbe holomorphe compacte connexe de genre* 1 *est une courbe elliptique.*