CHAPITRE V

COURBES HOLOMORPHES NON COMPACTES

Dans tout ce chapitre, on désigne par X *une courbe holomorphe connexe non compacte (dénombrable à l'infini) et par* π *un fibré vectoriel holomorphe sur* X.

§ 1. THÉORÈME DE BEHNKE-STEIN

Pour tout ensemble compact K de X, on désigne par $B_K(X, \pi)$ le sous-espace fermé de $L^2_K(X, \pi)$ défini par

$$B_K(X, \pi) = \{ v \in L^2_K(X, \pi) \mid v|_{\overset{\circ}{K}} \text{ est holomorphe} \}$$

(chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4).

LEMME 1. *Considérons la forme bilinéaire*

$$\Delta : L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L^2_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \to \mathbf{C}\,.$$

Pour qu'une section u *de* $L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *appartienne à l'image de l'opérateur différentiel*

$$d'' : H^1_K(X, \pi) \to L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

il suffit qu'elle soit Δ*-orthogonale au sous-espace* $B_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$.

Désignons par λ une forme linéaire continue sur $L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ nulle sur l'image de d''. Par dualité, il existe une section v de $L^2_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ et une seule telle que

$$\lambda = \Delta(\ ,v)\,.$$

En particulier, pour toute section h de $\mathscr{C}^\infty_c(\overset{\circ}{K}, \pi)$, on a

$$\Delta(d''h, v) = \lambda(d''h) = 0\,.$$

Le théorème de régularité (chap. III, § 1, théorème 2, corollaire) montre que

v appartient à $B_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ et l'on conclut en remarquant que l'image de d'' est fermée (chap. III, § 2, proposition 2).

LEMME 2. *Soit K_1 un ensemble compact de X dont le complémentaire n'a pas de composante connexe relativement compacte dans X et soit K_2 un voisinage compact de K_1. On désigne par E (resp. F) le sous-espace de $L^2_{K_1}(X, \pi)$ formé des sections de la forme $\chi_{K_1} u$ où u est une section de $B_{K_2}(X, \pi)$ (resp. une section de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ holomorphe au voisinage de K_1). Alors l'espace E est dense dans l'espace F pour la topologie induite par $L^2_{K_1}(X, \pi)$.*

D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que toute forme linéaire λ continue sur $L^2_{K_1}(X, \pi)$ et nulle sur E s'annule sur F. Par dualité, il existe une section v de $L^2_{K_1}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,1})$ et une seule telle que

$$\lambda = \Delta(\ ,v) .$$

Montrons que v est dans l'image de l'opérateur différentiel

$$d'' : H^1_{K_2}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \to L^2_{K_2}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,1}) .$$

Pour cela, il suffit de montrer que v est Δ-orthogonale à $B_{K_2}(X, \pi)$ (lemme 1). Or, pour toute section u de cet espace, on a

$$\Delta(u,v) = \int_X (u,v) = \int_X (\chi_{K_1} u, v) = \lambda(\chi_{K_1} u) = 0 .$$

Il existe donc une section w de $H^1_{K_2}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ telle que

$$v = d'' w .$$

Le théorème de régularité montre que w est holomorphe sur $X \backslash K_1$ et puisque toutes les composantes connexes de $X \backslash K_1$ rencontrent $X \backslash K_2$, le principe du prolongement analytique montre que le support de w est contenu dans K_1.

Pour toute section u de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ holomorphe au voisinage de K_1, on a

$$\lambda(\chi_{K_1} u) = \int_X (u,v) = \int_X (u, d'' w) = -\int_X (d'' u, w) = 0$$

ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 1 (Behnke-Stein). *Pour tout ensemble ouvert U de X dont le complémentaire n'a pas de composante connexe compacte, l'application de restriction de $\mathscr{O}(X, \pi)$ dans $\mathscr{O}(U, \pi)$ est d'image dense.*

Il faut montrer que pour toute section u de $\mathcal{O}(U, \pi)$, tout ensemble compact K de U et tout nombre réel ε strictement positif, il existe une section v de $\mathcal{O}(X, \pi)$ telle que

$$\| v - u \|_{L^2, K} \leqslant \varepsilon$$

la semi-norme $\| \ \|_{L^2, K}$ étant relative à des métriques hermitiennes sur Ω^1 et π. On peut supposer que le complémentaire de K n'a pas de composante connexe relativement compacte dans X et qu'il existe une suite exhaustive $(K_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de parties compactes de X ayant la même propriété, telle que K soit égal à K_0 (appendice II, lemmes 5 et 6). Posons

$$u_0 = \chi_{K_0} u \, .$$

Le lemme 2 montre qu'il existe une section u_1 de $B_{K_2}(X, \pi)$ telle que

$$\| u_1 - u_0 \|_{L^2, K_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^2} \, .$$

Pour tout entier j strictement positif, on construit de la même manière une section u_j de $B_{K_{j+1}}(X, \pi)$ telle que

$$\| u_j - u_{j-1} \|_{L^2, K_{j-1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \, .$$

Pour tout entier n, la suite $(\chi_{K_n} u_j)_{j \geqq n}$ est une suite de Cauchy dans $B_{K_n}(X, \pi)$. On désigne par v_n sa limite. Il est clair que les sections v_n se recollent en une section v de $\mathcal{O}(X, \pi)$. Il existe un entier n tel que

$$\| v - u_n \|_{L^2, K} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

On a alors

$$\| v - u \|_{L^2, K} \leqslant \| v - u_n \|_{L^2, K} + \| u_n - u \|_{L^2, K} \leqslant \varepsilon$$

ce qui démontre l'assertion.

§ 2. Calcul de quelques groupes de cohomologie

Lemme 1. *Pour tout point x de X, il existe une fonction méromorphe h sur X, holomorphe sur $X \backslash \{x\}$ possédant un pôle simple au point x.*

Désignons par ρ un fibré en droites holomorphe sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. Il résulte du théorème de