Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1975)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN

Kapitel: §3. Fonctions holomorphes sur une courbe holomorphe non compacte

Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

morphe de rang 1 subordonné à ce recouvrement représentant ρ. La section s est représentée par des fonctions s_ι vérifiant les relations

$$s_\iota = g_{\iota\kappa}\, s_\kappa\,.$$

En particulier, les formes différentielles $\dfrac{d'' s_\iota}{2i\pi s_\iota}$ se recollent en une forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$. Le théorème 1 montre qu'il existe une fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$d'' f = u$$

et un calcul élémentaire montre que la section $\exp(-2i\pi f)\, s$ de ρ est holomorphe et partout non nulle ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 1. *L'espace vectoriel* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ *s'identifie canoniquement au conoyau de l'opérateur différentiel*

$$d' : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X, \Omega^{1,0})\,.$$

L'injection canonique de $\mathcal{O}(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ définit par passage au quotient une application linéaire α de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$. Cette application est surjective. En effet, toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ s'écrit

$$u = u_1 + d'' f$$

avec u_1 de bidegré $(1, 0)$ et f dans $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. Posons

$$v = u_1 - d' f\,.$$

On peut écrire

$$u = v + df\,.$$

Si de plus u est fermée, la forme différentielle v est holomorphe ce qui démontre l'assertion. Il reste à voir que le noyau de α est égal à l'image de d'. C'est immédiat.

§ 3. FONCTIONS HOLOMORPHES SUR UNE COURBE HOLOMORPHE NON COMPACTE

Pour tout ensemble A de X, on pose

$$\hat{A} = \{ x \in X \mid |f(x)| \leqslant \|f\|_A \text{ pour tout } f \in \mathcal{O}(X) \}\,.$$

On dit que A est *holomorphiquement convexe* s'il est égal à $\hat{A}$.

LEMME 1. *Pour tout ensemble compact* K *de* X, *les ensembles* $\hat{K}$ *et* $\tilde{K}$ *sont égaux* [1]).

Soit x un point de $\tilde{K} \backslash K$ et soit V la composante connexe (relativement compacte) de x dans $X \backslash K$. Il est clair que ∂V est contenu dans K et le principe du maximum montre que l'on a

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{\partial V} \leqslant \|f\|_K$$

pour toute fonction holomorphe f sur X. Ceci montre que $\tilde{K}$ est contenu dans $\hat{K}$.

Réciproquement, soit x un point de $X \backslash \tilde{K}$. On vérifie aisément que l'on a

$$(K \cup \{x\})^{\sim} = \tilde{K} \cup \{x\} .$$

Le lemme 5 de l'appendice II et le théorème de Behnke-Stein montrent que la fonction qui vaut 0 au voisinage de K et 1 au voisinage de x peut être uniformément approchée sur $\tilde{K} \cup \{x\}$ par une fonction holomorphe f sur X. Si l'approximation est bonne, on a

$$\|f\|_K \leqslant \|f\|_{\tilde{K}} < |f(x)|$$

ce qui montre que x n'appartient pas à $\hat{K}$.

THÉORÈME 1 (Runge). *Pour tout ensemble compact* K *de* X, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) L'ensemble K *est holomorphiquement convexe.*

(2) L'ensemble $X \backslash K$ *n'a pas de composante connexe relativement compacte dans* X.

(3) Toute fonction holomorphe au voisinage de K *peut être uniformément approchée sur* K *par des fonctions holomorphes sur* X.

L'équivalence des deux premières conditions résulte du lemme 1. Le lemme 5 de l'appendice II et le théorème de Behnke-Stein montrent qu'elles impliquent la troisième.

Supposons (3) vérifiée et raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une composante connexe V de $X \backslash K$ relativement compacte dans X. On désigne par x un point de V et par h une fonction méromorphe sur X, holomorphe sur $X \backslash \{x\}$, possédant un pôle simple au point x (§ 2, lemme 1) Cette fonction peut être uniformément approchée sur K par des fonctions

---

[1]) Pour la définition de $\tilde{K}$, voir l'appendice II.

holomorphes sur X et puisque ∂V est contenu dans K, le principe du maximum montre que h peut être uniformément approchée sur $K \cup V$ par des fonctions holomorphes sur X, ce qui est absurde.

THÉORÈME 2. *(1) Les fonctions holomorphes sur X séparent les points.*

(2) Pour tout point x de X, il existe une fonction holomorphe sur X de rang 1 *au point x.*

(3) Pour tout ensemble compact K de X, l'ensemble $\hat{K}$ est compact.

On désigne par x et y des points distincts de X. Il est clair que l'on a

$$\{x, y\}^{\sim} = \{x, y\}$$

et la fonction qui vaut 0 (resp. 1) au point x (resp. y) peut être uniformément approchée sur $\{x, y\}$ par une fonction holomorphe sur X. Si l'approximation est bonne, elle prend des valeurs distinctes en x et y, ce qui démontre (1).

On désigne par x un point de X et par ϕ une carte de X dont le domaine contient x. Il existe un voisinage compact K de x dans le domaine de ϕ tel que $X \backslash K$ n'ait pas de composante connexe relativement compacte dans X. La fonction ϕ peut être uniformément approchée sur K par une fonction holomorphe f sur X. Si l'approximation est bonne, la fonction f est de rang 1 au point x (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4), ce qui démontre (2).

La dernière assertion résulte immédiatement du lemme 1 (appendice II, lemme 2).

Remarque 1.

On appelle *variété de Stein* toute variété holomorphe Y de dimension pure n, dénombrable à l'infini, vérifiant les conditions suivantes:

(1) Les fonctions holomorphes séparent les points de Y.

(2) Pour tout point x de Y, il existe une application holomorphe de Y dans $\mathbf{C}^n$ de rang n au point x.

(3) Pour toute partie compacte K de Y, l'ensemble

$$\hat{K} = \{ x \in Y \mid |u(x)| \leqslant \|u\|_K \text{ pour tout } u \in \mathcal{O}(Y) \}$$

est compact.

Le théorème 2 montre donc que toute courbe holomorphe ouverte dénombrable à l'infini est une variété de Stein.