§4. Fonctions méromorphes sur une courbe holomorphe non compacte

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

§ 4. Fonctions méromorphes sur une courbe holomorphe non compacte

Théorème 1 (Mittag-Leffler). *Toute partie principale d'un fibré en droites holomorphe sur* X *provient d'une section méromorphe.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2 (chap. I, § 3, proposition 2).

Remarque 1.

En fait, le théorème 1 est valable pour tout fibré vectoriel holomorphe sur X (voir théorème 3 ci-dessous).

Théorème 2 (Weierstrass). *Tout diviseur de* X *est le diviseur d'une fonction méromorphe.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2 (chap. I, § 3, proposition 3).

Corollaire. *Toute fonction méromorphe* h *sur* X *est le quotient de deux fonctions holomorphes ne s'annulant pas simultanément.*

Il existe une fonction holomorphe v sur X dont le diviseur est $\sup(-(h), 0)$. La fonction u définie par

$$u = vh$$

est holomorphe et ne s'annule pas en même temps que v, d'où l'assertion.

Proposition 1. *Soit* A *un ensemble fermé discret de* X *et soit* f *une fonction à valeurs complexes définie sur* A. *Il existe alors une fonction holomorphe* h *sur* X *prolongeant* f.

Désignons par u une fonction holomorphe sur X dont le diviseur est donné par la formule

$$(u) = \sum_{x \in A} 1 \cdot x$$

(théorème 2) et par v une fonction méromorphe sur X vérifiant les relations

$$\begin{aligned} &v_x - f(x)\, u_x^{-1} \in \mathcal{O}_x && \text{si } x \in A \\ &v_x \in \mathcal{O}_x && \text{si } x \in X \backslash A \end{aligned}$$

(théorème 1). Il suffit alors de poser

$$h = uv\,.$$

PROPOSITION 2. *Désignons par* π *un fibré vectoriel holomorphe sur* X *et par* σ *le fibré quotient de* π *par un sous-fibré en droites holomorphe* ρ. *Pour toute section holomorphe* t *de* σ, *il existe une section holomorphe* s *de* π *relevant* t.

Par définition même du fibré quotient (chap. 0, § 2, exemple 3), il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota\in I}$ de X et, pour chaque indice ι, une section holomorphe s_ι de π sur U_ι relevant $t|_{U_\iota}$. La section $s_{\kappa\iota}$ définie sur $U_\iota \cap U_\kappa$ par

$$s_{\kappa\iota} = s_\iota - s_\kappa$$

prend ses valeurs dans ρ. Il existe donc pour chaque indice ι une section f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \rho)$ telle que

$$s_{\kappa\iota} = f_\iota - f_\kappa$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). Comme $s_{\kappa\iota}$ est holomorphe, les formes différentielles $d''f_\iota$ se recollent en une forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \rho \otimes \Omega^{0,1})$. Il existe donc une section f de $\mathscr{C}^\infty(X, \rho)$ telle que

$$d''f = u$$

(§ 2, théorème 1, corollaire). Ceci montre que les sections $s_\iota - f_\iota + f|_{U_\iota}$ qui se recollent en une section s de π sont holomorphes. Comme elles relèvent $t|_{U_\iota}$, ceci démontre l'assertion.

THÉORÈME 3. *Tout fibré vectoriel holomorphe* π *sur* X *est trivial.*

On va raisonner par récurrence sur le rang p de π. Si p est égal à 1, l'assertion résulte du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2. Supposons p au moins égal à 2 et le théorème démontré pour $p - 1$.

Nous allons tout d'abord construire une section holomorphe s_1 de π partout non nulle. Le théorème de Behnke-Stein montre qu'il existe une section holomorphe s de π non identiquement nulle. Pour toute carte Φ de π ayant pour domaine un ensemble connexe U, on a

$$s_\Phi = (u_1, \ldots, u_p)$$

où $u_1, \ldots, u_p$ sont des fonctions holomorphes sur U dont l'une au moins n'est pas nulle. On vérifie aisément que le diviseur v défini par

$$v|_U = \inf_{1 \leq j \leq p} (u_j)$$

est indépendant de Φ et l'on désigne par f une fonction holomorphe sur X ayant v pour diviseur (théorème 2). Il est clair que la section

$$s_1 = \frac{s}{f}$$

est holomorphe et partout non nulle.

Désignons par ρ le fibré en droites holomorphe engendré par s_1 et par σ le fibré quotient de π par ρ. Par hypothèse de récurrence, il existe des sections holomorphes $t_2, \ldots, t_p$ de σ qui engendrent la fibre en tout point. Ces sections se relèvent en des sections holomorphes $s_2, \ldots, s_p$ de π (proposition 2). Il est clair que $s_1, \ldots, s_p$ engendrent la fibre de π en tout point, ce qui démontre l'assertion.