

§4. Fonctions méromorphes sur une courbe holomorphe non compacte

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§ 4. FONCTIONS MÉROMORPHES SUR UNE COURBE HOLOMORPHE NON COMPACTE

THÉORÈME 1 (Mittag-Leffler). *Toute partie principale d'un fibré en droites holomorphe sur X provient d'une section méromorphe.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2 (chap. I, § 3, proposition 2).

Remarque 1.

En fait, le théorème 1 est valable pour tout fibré vectoriel holomorphe sur X (voir théorème 3 ci-dessous).

THÉORÈME 2 (Weierstrass). *Tout diviseur de X est le diviseur d'une fonction méromorphe.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2 (chap. I, § 3, proposition 3).

COROLLAIRE. *Toute fonction méromorphe h sur X est le quotient de deux fonctions holomorphes ne s'annulant pas simultanément.*

Il existe une fonction holomorphe v sur X dont le diviseur est $\text{sup}(- (h), 0)$. La fonction u définie par

$$u = vh$$

est holomorphe et ne s'annule pas en même temps que v , d'où l'assertion.

PROPOSITION 1. *Soit A un ensemble fermé discret de X et soit f une fonction à valeurs complexes définie sur A . Il existe alors une fonction holomorphe h sur X prolongeant f .*

Désignons par u une fonction holomorphe sur X dont le diviseur est donné par la formule

$$(u) = \sum_{x \in A} 1 \cdot x$$

(théorème 2) et par v une fonction méromorphe sur X vérifiant les relations

$$\begin{aligned} v_x - f(x) u_x^{-1} &\in \mathcal{O}_x && \text{si } x \in A \\ v_x &\in \mathcal{O}_x && \text{si } x \in X \setminus A \end{aligned}$$

(théorème 1). Il suffit alors de poser

$$h = uv.$$

PROPOSITION 2. Désignons par π un fibré vectoriel holomorphe sur X et par σ le fibré quotient de π par un sous-fibré en droites holomorphe ρ . Pour toute section holomorphe t de σ , il existe une section holomorphe s de π relevant t .

Par définition même du fibré quotient (chap. 0, § 2, exemple 3), il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X et, pour chaque indice i , une section holomorphe s_i de π sur U_i relevant $t|_{U_i}$. La section $s_{\kappa i}$ définie sur $U_i \cap U_\kappa$ par

$$s_{\kappa i} = s_i - s_\kappa$$

prend ses valeurs dans ρ . Il existe donc pour chaque indice i une section f_i de $\mathcal{C}^\infty(U_i, \rho)$ telle que

$$s_{\kappa i} = f_i - f_\kappa$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). Comme $s_{\kappa i}$ est holomorphe, les formes différentielles $d'' f_i$ se recollent en une forme différentielle u de $\mathcal{C}^\infty(X, \rho \otimes \Omega^{0,1})$. Il existe donc une section f de $\mathcal{C}^\infty(X, \rho)$ telle que

$$d'' f = u$$

(§ 2, théorème 1, corollaire). Ceci montre que les sections $s_i - f_i + f|_{U_i}$ qui se recollent en une section s de π sont holomorphes. Comme elles relèvent $t|_{U_i}$, ceci démontre l'assertion.

THÉORÈME 3. *Tout fibré vectoriel holomorphe π sur X est trivial.*

On va raisonner par récurrence sur le rang p de π . Si p est égal à 1, l'assertion résulte du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2. Supposons p au moins égal à 2 et le théorème démontré pour $p - 1$.

Nous allons tout d'abord construire une section holomorphe s_1 de π partout non nulle. Le théorème de Behnke-Stein montre qu'il existe une section holomorphe s de π non identiquement nulle. Pour toute carte Φ de π ayant pour domaine un ensemble connexe U , on a

$$s_\Phi = (u_1, \dots, u_p)$$

où u_1, \dots, u_p sont des fonctions holomorphes sur U dont l'une au moins n'est pas nulle. On vérifie aisément que le diviseur v défini par

$$v|_U = \inf_{1 \leq j \leq p} (u_j)$$

est indépendant de Φ et l'on désigne par f une fonction holomorphe sur X ayant v pour diviseur (théorème 2). Il est clair que la section

$$s_1 = \frac{s}{f}$$

est holomorphe et partout non nulle.

Désignons par ρ le fibré en droites holomorphe engendré par s_1 et par σ le fibré quotient de π par ρ . Par hypothèse de récurrence, il existe des sections holomorphes t_2, \dots, t_p de σ qui engendrent la fibre en tout point. Ces sections se relèvent en des sections holomorphes s_2, \dots, s_p de π (proposition 2). Il est clair que s_1, \dots, s_p engendrent la fibre de π en tout point, ce qui démontre l'assertion.