(2) Le théorème des fonctions réciproques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

(2) Le théorème des fonctions réciproques

Dans ce numéro, on désigne par $\mathbf{k}$ le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.

Si $\mathbf{k}$ est égal à $\mathbf{C}$, indéfiniment dérivable signifie donc holomorphe (chap. I, § 1, proposition 1, corollaire 1).

THÉORÈME 1 (Fonctions réciproques). *Soient U et V deux ensembles ouverts de $\mathbf{k}^n$ et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V. On suppose que la dérivée de u au point ξ est bijective. L'application u est alors un difféomorphisme d'un voisinage de ξ sur un voisinage de $u(\xi)$.*

Par des changements linéaires affines de coordonnées, on peut supposer que ξ et $u(\xi)$ coïncident avec l'origine et que la dérivée $Du(0)$ est l'identité. L'application v de U dans $\mathbf{k}^n$ définie par

$$v(x) = u(x) - x$$

est indéfiniment dérivable et a une dérivée nulle à l'origine. Par continuité, il existe donc un cube $C(0, r)$ relativement compact dans U tel que $Du(x)$ soit bijective et tel que

$$|Dv(x)| \leqslant \frac{1}{2n}$$

pour tout point x de $C(0, r)$ (la norme de $Dv(x)$ est par définition le maximum des modules des dérivées partielles de v au point x). Le théorème des accroissements finis montre que l'on a

$$|v(x') - v(x'')| \leqslant \frac{1}{2}|x' - x''|$$

et par conséquent

$$|u(x') - u(x'')| \geqslant \frac{1}{2}|x' - x''|$$

pour tout couple (x', x'') de points de $C(0, r)$. En particulier, la restriction de u à $C(0, r)$ est injective. Par récurrence sur l'entier k, on définit une application continue de $C\left(0, \frac{r}{2}\right)$ dans $C(0, r)$ en posant

$$w_0(y) = 0 \quad \text{et} \quad w_{k+1}(y) = y - v(w_k(y)).$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$\begin{aligned} | w_{k+1}(y) - w_k(y) | &= | v(w_k(y)) - v(w_{k-1}(y)) | \\ &\leqslant \frac{1}{2} | w_k(y) - w_{k-1}(y) | \leqslant \frac{r}{2^k} . \end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(w_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers une application continue (holomorphe dans le cas complexe, chap. I, § 1, proposition 1, corollaire 3) w de $C\left(0, \frac{r}{2}\right)$ dans $\bar{C}(0, r)$ et l'on a à la limite

$$w(y) = y - v(w(y)) .$$

En particulier, l'application w prend ses valeurs dans $C(0, r)$. Posons

$$V' = C\left(0, \frac{r}{2}\right) \quad \text{et} \quad U' = C(0, r) \cap u^{-1}(V') .$$

Pour tout point y de V', on a

$$u(w(y)) = w(y) + v(w(y)) = y ,$$

en particulier, l'application w envoie V' dans U'. D'autre part, puisque u est injective sur V', on a

$$w(u(x)) = x$$

pour tout point x de U'. Ceci montre que u est un homéomorphisme de U' sur V' et que w est l'homéomorphisme réciproque. Il reste à voir que w est indéfiniment dérivable.

Pour tout couple (x', x) de points de U', on peut écrire

$$u(x') - u(x) = Du(x)(x' - x) + h(x', x) | x' - x |$$

où $h(\ , x)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque x' tend vers x. Pour tout couple (y, y') de points de V', on a donc

$$\begin{aligned} w(y') - w(y) = {} & Du(w(y))^{-1} (y' - y) \\ & + Du(w(y))^{-1} h(w(y'), w(y)) | w(y') - w(y) | \end{aligned}$$

Il résulte d'autre part des inégalités ci-dessus que l'on a

$$\frac{h(w(y'), w(y))}{| y' - y |} \leqslant 2 \frac{h(w(y'), w(y))}{| w(y') - w(y) |}$$

ce qui montre que w est dérivable au point y et que sa dérivée est $Du(w(y))^{-1}$. Comme cette dernière application est continue, on voit que w

est continûment dérivable, puis, par récurrence, qu'elle est indéfiniment dérivable.

THÉORÈME 2 (Théorème du rang). *Soient U et V deux ensembles ouverts de $\mathbf{k}^n$ et $\mathbf{k}^m$ respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V. On suppose que le rang de u est constant égal à p sur U. Pour tout point ξ de U, il existe un difféomorphisme ϕ d'un voisinage U' de l'origine dans $\mathbf{k}^n$ sur un voisinage de ξ dans U et un difféomorphisme ψ d'un voisinage de $u(\xi)$ dans V sur un voisinage V' de l'origine dans $\mathbf{k}^m$ tels que*

$$(\psi \cdot u \cdot \phi)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$$

pour tout point $(x_1, \ldots, x_n)$ de U'.

Par des changements linéaires affines de coordonnées, on peut supposer que ξ et $u(\xi)$ coïncident avec l'origine et que la dérivée $Du(0)$ est définie par

$$Du(0)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0).$$

Désignons par v l'application de U dans $\mathbf{k}^n$ définie par

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \big(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_p(x_1, \ldots, x_n), x_{p+1}, \ldots, x_n\big)$$

où $u_1, \ldots, u_m$ désignent les fonctions coordonnées de u. La dérivée de v à l'origine est bijective. Quitte à restreindre U, on peut supposer que v est un difféomorphisme de U sur un cube $C(0, r)$ de $\mathbf{k}^n$ (théorème 1). On désigne par ϕ le difféomorphisme réciproque. Par construction, on a

$$(u \cdot \phi)(x_1, \ldots, x_n) = \big(x_1, \ldots, x_p, w_{p+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, w_m(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

avec

$$w_j = v_j \cdot u \cdot \phi$$

pour tout entier j compris entre $p + 1$ et m. Le rang de u étant exactement p, on voit que les fonctions $w_{p+1}, \ldots, w_m$ sont indépendantes des variables $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Il suffit alors de prendre pour ψ la restriction à un voisinage convenable de l'origine de l'application définie par

$$\begin{aligned}&\psi(y_1, \ldots, y_m)\\ &= \big(y_1, \ldots, y_p, y_{p+1} - w_{p+1}(y_1, \ldots, y_p), \ldots, y_m - w_m(y_1, \ldots, y_p)\big).\end{aligned}$$

COROLLAIRE 1. *Soient U et V deux ensembles ouverts de $\mathbf{k}^n$ et $\mathbf{k}^m$ respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V. On suppose que le rang de u est égal à m en un point ξ. Il existe alors un* *voisinage* V' *de* $u(\xi)$ *dans* V, *un voisinage* W *de l'origine dans* $\mathbf{k}^{n-m}$ *et un difféomorphisme* ϕ *de* $V' \times W$ *sur un voisinage de* ξ *dans* U *tels que*

$$u = pr_1 \cdot \phi$$

où pr_1 *désigne la projection canonique de* $V' \times W$ *sur* V'.

On remarque que la dérivée de u demeure surjective au voisinage de ξ.

COROLLAIRE 2. *Soient* U *et* V *deux ensembles ouverts de* $\mathbf{k}^n$ *et* $\mathbf{k}^m$ *respectivement et soit* u *une application indéfiniment dérivable de* U *dans* V. *On suppose que le rang de* u *est égal à* n *en un point* ξ. *Il existe alors un voisinage* U' *de* ξ *dans* U, *un voisinage* W *de l'origine dans* $\mathbf{k}^{m-n}$ *et un difféomorphisme* ϕ *d'un voisinage de* $u(\xi)$ *dans* V *sur* $U' \times W$ tels que

$$\phi \cdot u = 1_{U'} \times 0$$

où 0 *désigne l'application constante de* W *sur l'origine de* $\mathbf{k}^{m-n}$.

On remarque que la dérivée de u demeure injective au voisinage de ξ.

THÉORÈME 3 (Fonctions implicites). *Soient* U *et* V *deux ensembles ouverts de* $\mathbf{k}^n$ *et* $\mathbf{k}^m$ *respectivement et soit* u *une application indéfiniment dérivable de* $U \times V$ *dans* $\mathbf{k}^m$. *On suppose que* u *envoie le point* (ξ, η) *sur l'origine et que la dérivée au point* η *de l'application partielle* $u(\xi, \ )$ *est bijective. Il existe alors un voisinage* $U' \times V'$ *de* (ξ, η) *dans* $U \times V$ *et une application indéfiniment dérivable* v *de* U' *dans* V' *tels que l'ensemble des zéros de* u *dans* $U' \times V'$ *coïncide avec le graphe de* v.

La dérivée au point (ξ, η) de l'application w de $U \times V$ dans $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$ définie par

$$w(x, y) = \big(x, u(x, y)\big)$$

est bijective. Quitte à restreindre $U \times V$, on peut supposer que w est un difféomorphisme sur un voisinage W de $(\xi, 0)$ dans $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$. On désigne par ϕ l'isomorphisme réciproque et l'on pose

$$U' = \{ x \in U \mid (x, 0) \in W \}.$$

Il suffit alors de prendre pour $v(x)$ la projection de $\phi(x, 0)$ dans V.

(3) Le théorème de Sard

Soient U et V des ensembles ouverts de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V.