

(2) Le théorème des fonctions réciproques

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

(2) *Le théorème des fonctions réciproques*

Dans ce numéro, on désigne par \mathbf{k} le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.

Si \mathbf{k} est égal à \mathbf{C} , indéfiniment dérivable signifie donc holomorphe (chap. I, § 1, proposition 1, corollaire 1).

THÉORÈME 1 (Fonctions réciproques). *Soient U et V deux ensembles ouverts de \mathbf{k}^n et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V . On suppose que la dérivée de u au point ξ est bijective. L'application u est alors un difféomorphisme d'un voisinage de ξ sur un voisinage de $u(\xi)$.*

Par des changements linéaires affines de coordonnées, on peut supposer que ξ et $u(\xi)$ coïncident avec l'origine et que la dérivée $Du(0)$ est l'identité. L'application v de U dans \mathbf{k}^n définie par

$$v(x) = u(x) - x$$

est indéfiniment dérivable et a une dérivée nulle à l'origine. Par continuité, il existe donc un cube $C(0, r)$ relativement compact dans U tel que $Du(x)$ soit bijective et tel que

$$|Dv(x)| \leq \frac{1}{2n}$$

pour tout point x de $C(0, r)$ (la norme de $Dv(x)$ est par définition le maximum des modules des dérivées partielles de v au point x). Le théorème des accroissements finis montre que l'on a

$$|v(x') - v(x'')| \leq \frac{1}{2} |x' - x''|$$

et par conséquent

$$|u(x') - u(x'')| \geq \frac{1}{2} |x' - x''|$$

pour tout couple (x', x'') de points de $C(0, r)$. En particulier, la restriction de u à $C(0, r)$ est injective. Par récurrence sur l'entier k , on définit une application continue de $C\left(0, \frac{r}{2}\right)$ dans $C(0, r)$ en posant

$$w_0(y) = 0 \quad \text{et} \quad w_{k+1}(y) = y - v(w_k(y)).$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$\begin{aligned} |w_{k+1}(y) - w_k(y)| &= |v(w_k(y)) - v(w_{k-1}(y))| \\ &\leq \frac{1}{2} |w_k(y) - w_{k-1}(y)| \leq \frac{r}{2^k}. \end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une application continue (holomorphe dans le cas complexe, chap. I, § 1, proposition 1, corollaire 3) w de $C\left(0, \frac{r}{2}\right)$ dans $\bar{C}(0, r)$ et l'on a à la limite

$$w(y) = y - v(w(y)).$$

En particulier, l'application w prend ses valeurs dans $C(0, r)$. Posons

$$V' = C\left(0, \frac{r}{2}\right) \quad \text{et} \quad U' = C(0, r) \cap u^{-1}(V').$$

Pour tout point y de V' , on a

$$u(w(y)) = w(y) + v(w(y)) = y,$$

en particulier, l'application w envoie V' dans U' . D'autre part, puisque u est injective sur V' , on a

$$w(u(x)) = x$$

pour tout point x de U' . Ceci montre que u est un homéomorphisme de U' sur V' et que w est l'homéomorphisme réciproque. Il reste à voir que w est indéfiniment dérivable.

Pour tout couple (x', x) de points de U' , on peut écrire

$$u(x') - u(x) = Du(x)(x' - x) + h(x', x) |x' - x|$$

où $h(\cdot, x)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque x' tend vers x . Pour tout couple (y, y') de points de V' , on a donc

$$\begin{aligned} w(y') - w(y) &= Du(w(y))^{-1}(y' - y) \\ &+ Du(w(y))^{-1}h(w(y'), w(y)) |w(y') - w(y)| \end{aligned}$$

Il résulte d'autre part des inégalités ci-dessus que l'on a

$$\frac{h(w(y'), w(y))}{|y' - y|} \leq 2 \frac{h(w(y'), w(y))}{|w(y') - w(y)|}$$

ce qui montre que w est dérivable au point y et que sa dérivée est $Du(w(y))^{-1}$. Comme cette dernière application est continue, on voit que w

est continûment dérivable, puis, par récurrence, qu'elle est indéfiniment dérivable.

THÉORÈME 2 (Théorème du rang). Soient U et V deux ensembles ouverts de \mathbf{k}^n et \mathbf{k}^m respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V . On suppose que le rang de u est constant égal à p sur U . Pour tout point ξ de U , il existe un difféomorphisme ϕ d'un voisinage U' de l'origine dans \mathbf{k}^n sur un voisinage de ξ dans U et un difféomorphisme ψ d'un voisinage de $u(\xi)$ dans V sur un voisinage V' de l'origine dans \mathbf{k}^m tels que

$$(\psi \cdot u \cdot \phi)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$$

pour tout point (x_1, \dots, x_n) de U' .

Par des changements linéaires affines de coordonnées, on peut supposer que ξ et $u(\xi)$ coïncident avec l'origine et que la dérivée $Du(0)$ est définie par

$$Du(0)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0).$$

Désignons par v l'application de U dans \mathbf{k}^n définie par

$$v(x_1, \dots, x_n) = (u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_p(x_1, \dots, x_n), x_{p+1}, \dots, x_n)$$

où u_1, \dots, u_m désignent les fonctions coordonnées de u . La dérivée de v à l'origine est bijective. Quitte à restreindre U , on peut supposer que v est un difféomorphisme de U sur un cube $C(0, r)$ de \mathbf{k}^n (théorème 1). On désigne par ϕ le difféomorphisme réciproque. Par construction, on a

$$(u \cdot \phi)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p, w_{p+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, w_m(x_1, \dots, x_n))$$

avec

$$w_j = v_j \cdot u \cdot \phi$$

pour tout entier j compris entre $p + 1$ et m . Le rang de u étant exactement p , on voit que les fonctions w_{p+1}, \dots, w_m sont indépendantes des variables x_{p+1}, \dots, x_n . Il suffit alors de prendre pour ψ la restriction à un voisinage convenable de l'origine de l'application définie par

$$\begin{aligned} & \psi(y_1, \dots, y_m) \\ &= (y_1, \dots, y_p, y_{p+1} - w_{p+1}(y_1, \dots, y_p), \dots, y_m - w_m(y_1, \dots, y_p)). \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1. Soient U et V deux ensembles ouverts de \mathbf{k}^n et \mathbf{k}^m respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V . On suppose que le rang de u est égal à m en un point ξ . Il existe alors un

voisinage V' de $u(\xi)$ dans V , un voisinage W de l'origine dans \mathbf{k}^{n-m} et un difféomorphisme ϕ de $V' \times W$ sur un voisinage de ξ dans U tels que

$$u = pr_1 \cdot \phi$$

où pr_1 désigne la projection canonique de $V' \times W$ sur V' .

On remarque que la dérivée de u demeure surjective au voisinage de ξ .

COROLLAIRE 2. Soient U et V deux ensembles ouverts de \mathbf{k}^n et \mathbf{k}^m respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V . On suppose que le rang de u est égal à n en un point ξ . Il existe alors un voisinage U' de ξ dans U , un voisinage W de l'origine dans \mathbf{k}^{m-n} et un difféomorphisme ϕ d'un voisinage de $u(\xi)$ dans V sur $U' \times W$ tels que

$$\phi \cdot u = 1_{U'} \times 0$$

où 0 désigne l'application constante de W sur l'origine de \mathbf{k}^{m-n} .

On remarque que la dérivée de u demeure injective au voisinage de ξ .

THÉORÈME 3 (Fonctions implicites). Soient U et V deux ensembles ouverts de \mathbf{k}^n et \mathbf{k}^m respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de $U \times V$ dans \mathbf{k}^m . On suppose que u envoie le point (ξ, η) sur l'origine et que la dérivée au point η de l'application partielle $u(\xi, \cdot)$ est bijective. Il existe alors un voisinage $U' \times V'$ de (ξ, η) dans $U \times V$ et une application indéfiniment dérivable v de U' dans V' tels que l'ensemble des zéros de u dans $U' \times V'$ coïncide avec le graphe de v .

La dérivée au point (ξ, η) de l'application w de $U \times V$ dans $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$ définie par

$$w(x, y) = (x, u(x, y))$$

est bijective. Quitte à restreindre $U \times V$, on peut supposer que w est un difféomorphisme sur un voisinage W de $(\xi, 0)$ dans $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$. On désigne par ϕ l'isomorphisme réciproque et l'on pose

$$U' = \{x \in U \mid (x, 0) \in W\}.$$

Il suffit alors de prendre pour $v(x)$ la projection de $\phi(x, 0)$ dans V .

(3) Le théorème de Sard

Soient U et V des ensembles ouverts de \mathbf{R}^n et \mathbf{R}^m respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V .