(3) Le théorème de Sard

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

voisinage V' *de* $u(\xi)$ *dans* V, *un voisinage* W *de l'origine dans* $\mathbf{k}^{n-m}$ *et un difféomorphisme* ϕ *de* $V' \times W$ *sur un voisinage de* ξ *dans* U *tels que*

$$u = pr_1 \cdot \phi$$

où pr_1 *désigne la projection canonique de* $V' \times W$ *sur* V'.

On remarque que la dérivée de u demeure surjective au voisinage de ξ.

COROLLAIRE 2. *Soient* U *et* V *deux ensembles ouverts de* $\mathbf{k}^n$ *et* $\mathbf{k}^m$ *respectivement et soit* u *une application indéfiniment dérivable de* U *dans* V. *On suppose que le rang de* u *est égal à* n *en un point* ξ. *Il existe alors un voisinage* U' *de* ξ *dans* U, *un voisinage* W *de l'origine dans* $\mathbf{k}^{m-n}$ *et un difféomorphisme* ϕ *d'un voisinage de* $u(\xi)$ *dans* V *sur* $U' \times W$ tels que

$$\phi \cdot u = 1_{U'} \times 0$$

où 0 *désigne l'application constante de* W *sur l'origine de* $\mathbf{k}^{m-n}$.

On remarque que la dérivée de u demeure injective au voisinage de ξ.

THÉORÈME 3 (Fonctions implicites). *Soient* U *et* V *deux ensembles ouverts de* $\mathbf{k}^n$ *et* $\mathbf{k}^m$ *respectivement et soit* u *une application indéfiniment dérivable de* $U \times V$ *dans* $\mathbf{k}^m$. *On suppose que* u *envoie le point* (ξ, η) *sur l'origine et que la dérivée au point* η *de l'application partielle* $u(\xi, \ )$ *est bijective. Il existe alors un voisinage* $U' \times V'$ *de* (ξ, η) *dans* $U \times V$ *et une application indéfiniment dérivable* v *de* U' *dans* V' *tels que l'ensemble des zéros de* u *dans* $U' \times V'$ *coïncide avec le graphe de* v.

La dérivée au point (ξ, η) de l'application w de $U \times V$ dans $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$ définie par

$$w(x, y) = \big(x, u(x, y)\big)$$

est bijective. Quitte à restreindre $U \times V$, on peut supposer que w est un difféomorphisme sur un voisinage W de $(\xi, 0)$ dans $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$. On désigne par ϕ l'isomorphisme réciproque et l'on pose

$$U' = \{ x \in U \mid (x, 0) \in W \}.$$

Il suffit alors de prendre pour $v(x)$ la projection de $\phi(x, 0)$ dans V.

(3) Le théorème de Sard

Soient U et V des ensembles ouverts de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V.

On dit qu'un point x de U est un *point régulier* (resp. un *point critique*) *de* u si le rang de l'application $Du(x)$ est égal à m (resp. strictement inférieur à m). On dit qu'un point y de V est une *valeur régulière* (resp. une *valeur critique*) *de* u si tous les points de $u^{-1}(y)$ sont réguliers (resp. s'il existe un point critique dans $u^{-1}(y)$).

THÉORÈME 4 (Sard). *L'ensemble des valeurs critiques de* u *est de mesure de Lebesgue nulle.*

La démonstration va se faire par récurrence sur n, le résultat étant trivial pour n nul. On désigne par A_0 l'ensemble des points critiques de u et l'on pose

$$A_j = \{ x \in U \mid D^\alpha u(x) = 0 \text{ pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n \text{ tel que } |\alpha| \leqslant j \}$$

pour tout entier j strictement positif. On a les inclusions

$$U \supset A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_j \supset A_{j+1} \supset \ldots$$

et l'image par u de l'ensemble $A_j \backslash A_{j+1}$ est mesurable.

Montrons tout d'abord que $u(A_0 \backslash A_1)$ est de mesure nulle. Soit ξ un point de $A_0 \backslash A_1$. Par un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}(\xi)$ est non nul, en désignant par $u_1, \ldots, u_m$ les fonctions coordonnées de u.

L'application g de U dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \big(u_1(x_1, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n\big)$$

est de rang n au point ξ. Elle induit donc un isomorphisme d'un voisinage U' de ξ dans U sur un voisinage W de $g(\xi)$ dans $\mathbf{R}^n$ (théorème 1). On désigne par h l'isomorphisme réciproque. Quitte à remplacer u par $u \cdot h$ et U par W (on peut recouvrir $A_0 \backslash A_1$ par une famille dénombrable d'ensembles U'), on peut supposer que l'on a

$$\pi_2 \cdot u = \pi_1$$

en désignant par π_1 (resp. π_2) la projection canonique de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{R}^m$) sur son premier facteur. Dans ces conditions, un point $(y_1, \ldots, y_m)$ de V est une valeur critique de u si et seulement si le point $(y_2, \ldots, y_m)$ est une valeur critique de l'application partielle $u(y_1, \;)$. L'assertion résulte alors du théorème de Fubini ([5], théorème (7.8)) et de l'hypothèse de récurrence.

Supposons j strictement positif et montrons que $u(A_j \backslash A_{j+1})$ est de mesure nulle. Soit ξ un point de $A_j \backslash A_{j+1}$. Par un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer qu'il existe un multi-indice α de longueur j tel que

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(\xi) \neq 0 \qquad \text{avec} \qquad v = D^\alpha u\,.$$

L'application g de U dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \big(v(x_1, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n\big)$$

est de rang n au point ξ. Elle induit donc un isomorphisme d'un voisinage U' de ξ dans U sur un voisinage W de $(0, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ dans $\mathbf{R}^n$. Désignons par h l'isomorphisme réciproque. L'image par g de l'ensemble $A_j \cap U'$ est contenue dans l'ensemble

$$W' = (0 \times \mathbf{R}) \cap W.$$

On en déduit aisément que les points de $u(A_j \cap U')$ sont des valeurs critiques de l'application $u \cdot h\,|_{W'}$. L'assertion résulte alors de l'hypothèse de récurrence.

Montrons finalement que l'ensemble $u(A_j)$ est de mesure nulle pour j strictement supérieur à $\frac{n}{m} - 1$, ce qui achèvera la démonstration du théorème. Désignons par C un cube fermé de côté r dans U. Il existe une constante c telle que

$$|u(x) - u(\xi)| \leqslant c\,|x - \xi|^{j+1}$$

pour tout point ξ de $C \cap A_j$ et tout point x de C (théorème des accroissements finis). Désignons par k un entier naturel et divisons C en k^n cubes de côté $\frac{r}{k}$. Soit C_0 l'un d'eux et soit ξ un point de $C_0 \cap A_j$. Pour tout point x de C_0, on a

$$|x - \xi| \leqslant \frac{r}{k}\,.$$

On en déduit que $u(C_0)$ est contenu dans le cube de côté $2c\left(\frac{r}{k}\right)^{j+1}$ et de centre $u(\xi)$ dans $\mathbf{R}^m$. Ceci montre que $u(C \cap A_j)$ est contenu dans une réunion de cubes dont le volume total est au plus égal à

$$(2cr^{j+1})^m\, k^{n-m(j+1)}$$

ce qui démontre l'assertion.