

## **(3) Le théorème de Sard**

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

voisinage  $V'$  de  $u(\xi)$  dans  $V$ , un voisinage  $W$  de l'origine dans  $\mathbf{k}^{n-m}$  et un difféomorphisme  $\phi$  de  $V' \times W$  sur un voisinage de  $\xi$  dans  $U$  tels que

$$u = pr_1 \cdot \phi$$

où  $pr_1$  désigne la projection canonique de  $V' \times W$  sur  $V'$ .

On remarque que la dérivée de  $u$  demeure surjective au voisinage de  $\xi$ .

**COROLLAIRE 2.** Soient  $U$  et  $V$  deux ensembles ouverts de  $\mathbf{k}^n$  et  $\mathbf{k}^m$  respectivement et soit  $u$  une application indéfiniment dérivable de  $U$  dans  $V$ . On suppose que le rang de  $u$  est égal à  $n$  en un point  $\xi$ . Il existe alors un voisinage  $U'$  de  $\xi$  dans  $U$ , un voisinage  $W$  de l'origine dans  $\mathbf{k}^{m-n}$  et un difféomorphisme  $\phi$  d'un voisinage de  $u(\xi)$  dans  $V$  sur  $U' \times W$  tels que

$$\phi \cdot u = 1_{U'} \times 0$$

où  $0$  désigne l'application constante de  $W$  sur l'origine de  $\mathbf{k}^{m-n}$ .

On remarque que la dérivée de  $u$  demeure injective au voisinage de  $\xi$ .

**THÉORÈME 3 (Fonctions implicites).** Soient  $U$  et  $V$  deux ensembles ouverts de  $\mathbf{k}^n$  et  $\mathbf{k}^m$  respectivement et soit  $u$  une application indéfiniment dérivable de  $U \times V$  dans  $\mathbf{k}^m$ . On suppose que  $u$  envoie le point  $(\xi, \eta)$  sur l'origine et que la dérivée au point  $\eta$  de l'application partielle  $u(\xi, \cdot)$  est bijective. Il existe alors un voisinage  $U' \times V'$  de  $(\xi, \eta)$  dans  $U \times V$  et une application indéfiniment dérivable  $v$  de  $U'$  dans  $V'$  tels que l'ensemble des zéros de  $u$  dans  $U' \times V'$  coïncide avec le graphe de  $v$ .

La dérivée au point  $(\xi, \eta)$  de l'application  $w$  de  $U \times V$  dans  $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$  définie par

$$w(x, y) = (x, u(x, y))$$

est bijective. Quitte à restreindre  $U \times V$ , on peut supposer que  $w$  est un difféomorphisme sur un voisinage  $W$  de  $(\xi, 0)$  dans  $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$ . On désigne par  $\phi$  l'isomorphisme réciproque et l'on pose

$$U' = \{ x \in U \mid (x, 0) \in W \}.$$

Il suffit alors de prendre pour  $v(x)$  la projection de  $\phi(x, 0)$  dans  $V$ .

### (3) Le théorème de Sard

Soient  $U$  et  $V$  des ensembles ouverts de  $\mathbf{R}^n$  et  $\mathbf{R}^m$  respectivement et soit  $u$  une application indéfiniment dérivable de  $U$  dans  $V$ .

On dit qu'un point  $x$  de  $U$  est un *point régulier* (resp. un *point critique*) de  $u$  si le rang de l'application  $Du(x)$  est égal à  $m$  (resp. strictement inférieur à  $m$ ). On dit qu'un point  $y$  de  $V$  est une *valeur régulière* (resp. une *valeur critique*) de  $u$  si tous les points de  $u^{-1}(y)$  sont réguliers (resp. s'il existe un point critique dans  $u^{-1}(y)$ ).

THÉORÈME 4 (Sard). *L'ensemble des valeurs critiques de  $u$  est de mesure de Lebesgue nulle.*

La démonstration va se faire par récurrence sur  $n$ , le résultat étant trivial pour  $n$  nul. On désigne par  $A_0$  l'ensemble des points critiques de  $u$  et l'on pose

$$A_j = \{ x \in U \mid D^\alpha u(x) = 0 \text{ pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n \text{ tel que } |\alpha| \leq j \}$$

pour tout entier  $j$  strictement positif. On a les inclusions

$$U \supset A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_j \supset A_{j+1} \supset \dots$$

et l'image par  $u$  de l'ensemble  $A_j \setminus A_{j+1}$  est mesurable.

Montrons tout d'abord que  $u(A_0 \setminus A_1)$  est de mesure nulle. Soit  $\xi$  un point de  $A_0 \setminus A_1$ . Par un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\xi)$  est non nul, en désignant par  $u_1, \dots, u_m$  les fonctions coordonnées de  $u$ .

L'application  $g$  de  $U$  dans  $\mathbf{R}^n$  définie par

$$g(x_1, \dots, x_n) = (u_1(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$$

est de rang  $n$  au point  $\xi$ . Elle induit donc un isomorphisme d'un voisinage  $U'$  de  $\xi$  dans  $U$  sur un voisinage  $W$  de  $g(\xi)$  dans  $\mathbf{R}^n$  (théorème 1). On désigne par  $h$  l'isomorphisme réciproque. Quitte à remplacer  $u$  par  $u \cdot h$  et  $U$  par  $W$  (on peut recouvrir  $A_0 \setminus A_1$  par une famille dénombrable d'ensembles  $U'$ ), on peut supposer que l'on a

$$\pi_2 \cdot u = \pi_1$$

en désignant par  $\pi_1$  (resp.  $\pi_2$ ) la projection canonique de  $\mathbf{R}^n$  (resp.  $\mathbf{R}^m$ ) sur son premier facteur. Dans ces conditions, un point  $(y_1, \dots, y_m)$  de  $V$  est une valeur critique de  $u$  si et seulement si le point  $(y_2, \dots, y_m)$  est une valeur critique de l'application partielle  $u(y_1, \cdot)$ . L'assertion résulte alors du théorème de Fubini ([5], théorème (7.8)) et de l'hypothèse de récurrence.

Supposons  $j$  strictement positif et montrons que  $u(A_j \setminus A_{j+1})$  est de mesure nulle. Soit  $\xi$  un point de  $A_j \setminus A_{j+1}$ . Par un changement linéaire de

coordonnées, on peut supposer qu'il existe un multi-indice  $\alpha$  de longueur  $j$  tel que

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(\xi) \neq 0 \quad \text{avec} \quad v = D^\alpha u .$$

L'application  $g$  de  $U$  dans  $\mathbf{R}^n$  définie par

$$g(x_1, \dots, x_n) = (v(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$$

est de rang  $n$  au point  $\xi$ . Elle induit donc un isomorphisme d'un voisinage  $U'$  de  $\xi$  dans  $U$  sur un voisinage  $W$  de  $(0, \xi_2, \dots, \xi_n)$  dans  $\mathbf{R}^n$ . Désignons par  $h$  l'isomorphisme réciproque. L'image par  $g$  de l'ensemble  $A_j \cap U'$  est contenue dans l'ensemble

$$W' = (0 \times \mathbf{R}) \cap W .$$

On en déduit aisément que les points de  $u(A_j \cap U')$  sont des valeurs critiques de l'application  $u \cdot h|_{W'}$ . L'assertion résulte alors de l'hypothèse de récurrence.

Montrons finalement que l'ensemble  $u(A_j)$  est de mesure nulle pour  $j$  strictement supérieur à  $\frac{n}{m} - 1$ , ce qui achèvera la démonstration du théorème. Désignons par  $C$  un cube fermé de côté  $r$  dans  $U$ . Il existe une constante  $c$  telle que

$$|u(x) - u(\xi)| \leq c |x - \xi|^{j+1}$$

pour tout point  $\xi$  de  $C \cap A_j$  et tout point  $x$  de  $C$  (théorème des accroissements finis). Désignons par  $k$  un entier naturel et divisons  $C$  en  $k^n$  cubes de côté  $\frac{r}{k}$ . Soit  $C_0$  l'un d'eux et soit  $\xi$  un point de  $C_0 \cap A_j$ . Pour tout point  $x$  de  $C_0$ , on a

$$|x - \xi| \leq \frac{r}{k} .$$

On en déduit que  $u(C_0)$  est contenu dans le cube de côté  $2c \left(\frac{r}{k}\right)^{j+1}$  et de centre  $u(\xi)$  dans  $\mathbf{R}^m$ . Ceci montre que  $u(C \cap A_j)$  est contenu dans une réunion de cubes dont le volume total est au plus égal à

$$(2cr^{j+1})^m k^{n-m(j+1)}$$

ce qui démontre l'assertion.