

Appendice II

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

APPENDICE II

Les variétés topologiques considérées dans cet appendice ne sont pas nécessairement paracompactes.

(1) Sur le bouchage des trous

Soit X une variété topologique connexe. Pour toute partie A de X , on désigne par \tilde{A} la réunion de A et des composantes connexes de $X \setminus A$ relativement compactes dans X .

LEMME 1. *Soit B une partie de X et soit A une partie de B .*

(1) *Pour toute composante connexe V de $X \setminus A$, l'ensemble $V \setminus B$ est réunion de composantes connexes de $X \setminus B$.*

(2) *L'ensemble \tilde{A} est contenu dans \tilde{B} .*

(3) *L'ensemble \tilde{A} est égal à $(\tilde{A})^\sim$.*

La démonstration est laissée en exercice au lecteur.

LEMME 2. *Pour toute partie fermée A de X , l'ensemble \tilde{A} est fermé.*

Pour toute partie compacte A de X , l'ensemble \tilde{A} est compact.

La première assertion résulte de ce que X est localement connexe. Démontrons la seconde.

Soit U un voisinage ouvert relativement compact de A dans X et soit V une composante connexe de $X \setminus A$. Puisque X est connexe, l'ensemble $U \cap V$ est non vide et puisque V est connexe, ou bien V est contenu dans U , ou bien V rencontre ∂U . Comme les composantes connexes de $X \setminus A$ rencontrant ∂U sont en nombre fini, ceci démontre l'assertion.

LEMME 3. *On désigne par Y un espace topologique localement compact et par Y_0 une composante connexe compacte de Y . Alors Y_0 possède un système fondamental de voisinages ouverts et fermés.*

On peut supposer Y compact. On désigne par F l'ensemble des voisinages ouverts et fermés de Y_0 et l'on pose

$$A = \bigcap_{U \in F} U.$$

Il est clair que A est un sous-ensemble compact de Y contenant Y_0 et que F est un système fondamental de voisinages de A . Il suffit alors de montrer que A est égal à Y_0 ou ce qui revient au même que A est connexe. Raisonnons par l'absurde en supposant que A est la réunion de deux ensembles fermés disjoints non vides A_1 et A_2 . On peut trouver des voisinages disjoints U_1 et U_2 de A_1 et A_2 respectivement, ouverts et fermés dans Y . Comme Y_0 est connexe, il est contenu dans l'un de ces voisinages, ce qui est absurde.

LEMME 4. *Pour toute partie ouverte A de X , l'ensemble \tilde{A} est ouvert.*

Toute composante connexe V de $X \setminus A$ relativement compacte dans X est compacte. Le lemme 3 montre que V possède un voisinage compact U ouvert et fermé dans $X \setminus A$. En particulier, U est contenu dans \tilde{A} et l'on vérifie aisément que $A \cup U$ est un voisinage ouvert de V dans X ce qui démontre l'assertion.

LEMME 5. *Soit A un ensemble compact de X égal à l'ensemble \tilde{A} . Il existe alors un système fondamental de voisinages ouverts (resp. compacts) de A dont les complémentaires n'ont pas de composante connexe relativement compacte.*

Montrons tout d'abord que A possède un système fondamental de voisinages ouverts dont les complémentaires n'ont qu'un nombre fini de composantes connexes. Soient U un voisinage ouvert relativement compact de A dans X et soit K un voisinage compact de A dans U . On désigne par K' la réunion de K et des composantes connexes de $X \setminus K$ contenues dans U . On démontre comme dans le lemme 2 que $X \setminus K'$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. L'ensemble $\overset{\circ}{K}'$ est alors un voisinage ouvert de A dans U dont le complémentaire n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

Soit U un voisinage ouvert relativement compact de A dont le complémentaire n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et soient V_1, \dots, V_n les composantes connexes compactes de $X \setminus U$. Chacun des ensembles V_j est contenu dans une composante connexe W_j de $X \setminus A$ et l'hypothèse montre que W_j rencontre $\partial \tilde{U}$ (car \tilde{U} est un voisinage ouvert relativement compact de A). On désigne par c_j un chemin de W_j joignant V_j à $\partial \tilde{U}$ et l'on pose

$$U' = U \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq n} c_j.$$

Il est clair que U' est un voisinage ouvert de A dans U et la formule

$$X \setminus U' = (X \setminus \tilde{U}) \cup \bigcup_{1 \leq j \leq n} c_j \cup \bigcup_{1 \leq j \leq n} V_j$$

montre que $X \setminus U'$ n'a pas de composante connexe compacte.

L'assertion relative aux voisinages compacts se déduit aisément de ce qui précède et du lemme 1.

LEMME 6. *Supposons X dénombrable à l'infini. Il existe alors une suite exhaustive de parties compactes de X dont les complémentaires n'ont pas de composantes connexes relativement compactes.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 5.

(2) Le théorème de Poincaré-Volterra

THÉORÈME 1. *Soient X et Y deux variétés topologiques et soit u une application continue de X dans Y . On suppose que X est connexe et que les fibres de u sont discrètes. Si Y est de type dénombrable, il en est de même de X .*

On désigne par $(W_i)_{i \in I}$ une base dénombrable de la topologie de Y et par \mathcal{U} l'ensemble des composantes connexes relativement compactes des ensembles de la forme $u^{-1}(W_i)$. Il suffit de montrer que \mathcal{U} est un recouvrement dénombrable de X .

Pour tout point x de X , il existe un voisinage compact K de x tel que

$$K \cap u^{-1}(u(x)) = \{x\}.$$

En particulier, le point $u(x)$ n'appartient pas à $u(\partial K)$ et il existe un indice i tel que W_i contienne $u(x)$ et ne rencontre pas $u(\partial K)$. La composante connexe U de x dans $u^{-1}(W_i)$ est contenue dans K . On en déduit que \mathcal{U} est un recouvrement de X .

Il reste à voir que \mathcal{U} est dénombrable.

Remarquons tout d'abord que toute variété topologique Y de type dénombrable vérifie la propriété suivante:

(*) Toute famille d'ensembles ouverts non vides deux à deux disjoints de Y est dénombrable.

Soit U_0 un élément de \mathcal{U} . On définit par récurrence une famille $(\mathcal{U}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de parties de \mathcal{U} en posant

$$\mathcal{U}_0 = U_0$$

$$\mathcal{U}_{j+1} = \{ U \in \mathcal{U} \mid \text{il existe } V \in \mathcal{U}_j \text{ tel que } U \cap V \neq \emptyset \}.$$

Démontrons par récurrence que \mathcal{U}_j est dénombrable. Si \mathcal{U}_j est dénombrable, la réunion de ses éléments est une variété topologique U_j de type dénombrable et, pour tout indice ι , la famille \mathcal{F}_ι des composantes connexes de $u^{-1}(W_\iota)$ qui rencontrent U_j est dénombrable (propriété (*)), ce qui démontre l'assertion puisque \mathcal{U}_{j+1} est contenu dans la réunion des \mathcal{F}_ι .

Démontrons finalement par l'absurde que \mathcal{U} est la réunion des \mathcal{U}_j . Désignons par U la réunion des éléments de tous les \mathcal{U}_j et par V la réunion des éléments de \mathcal{U} n'appartenant à aucun des \mathcal{U}_j . Les ensembles U et V sont des ouverts non vides recouvrant X . Ils sont disjoints par construction ce qui contredit la connexité de X et démontre du même coup le théorème.

(3) *Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte connexe*

PROPOSITION 1. *Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte connexe X est de génération finie.*

Recouvrons X par des domaines de cartes V_0, \dots, V_n isomorphes à des boules, centrées en des points x_0, \dots, x_n . Pour tout entier j compris entre 0 et n , on désigne par U_j une boule de centre x_j relativement compacte dans V_j et l'on suppose que U_0, \dots, U_n recouvrent encore X .

Pour tout couple d'entiers (j, k) , on recouvre $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$ par des domaines de cartes $U_1^{j,k}, \dots, U_{n_{j,k}}^{j,k}$ isomorphes à des boules, centrées en des points $x_1^{j,k}, \dots, x_{n_{j,k}}^{j,k}$ de $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$. Remarquons que $n_{j,k}$ est nul si $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$ est vide.

Pour tout entier l compris entre 1 et $n_{j,k}$, on désigne par $\alpha_l^{j,k}$ un chemin joignant x_j à $x_l^{j,k}$ dans V_j et par $\beta_l^{j,k}$ un chemin joignant $x_l^{j,k}$ à x_k dans V_k . On pose

$$\gamma_l^{j,k} = \alpha_l^{j,k} \beta_l^{j,k}.$$

Nous allons montrer que tout lacet c de X au point x_0 est homotope à un produit de chemins $\gamma_l^{j,k}$, ce qui démontrera l'assertion.

Le lacet c se décompose en un produit de chemins c_1, \dots, c_p dont chacun est contenu dans l'un des ouverts U_0, \dots, U_n .

Désignons par c_m et c_{m+1} deux tels chemins. Le premier joint un point a_{m-1} à un point a_m dans U_j , le second le point a_m à un point a_{m+1} dans U_k . Il existe un ensemble ouvert $U_l^{j,k}$ contenant a_m . On choisit alors un chemin α joignant a_{m-1} à x_j dans U_j , un chemin β joignant x_k à a_{m+1} dans U_k et un chemin γ joignant $x_l^{j,k}$ à a_m dans $U_l^{j,k}$. Le chemin $\alpha \alpha_l^{j,k} \gamma$ est homotope au chemin c_m dans V_j et le chemin $\gamma^{-1} \beta_l^{j,k} \beta$ est homotope au chemin c_{m+1} dans V_k . Par conséquent, le chemin $\alpha \gamma_l^{j,k} \beta$ est homotope au chemin $c_m c_{m+1}$ dans X . On en déduit aisément l'assertion.