(3) Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte connexe

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Démontrons par récurrence que $\mathcal{U}_j$ est dénombrable. Si $\mathcal{U}_j$ est dénombrable, la réunion de ses éléments est une variété topologique U_j de type dénombrable et, pour tout indice ι, la famille $\mathcal{F}_\iota$ des composantes connexes de $u^{-1}(W_\iota)$ qui rencontrent U_j est dénombrable (propriété (*)), ce qui démontre l'assertion puisque $\mathcal{U}_{j+1}$ est contenu dans la réunion des $\mathcal{F}_\iota$.

Démontrons finalement par l'absurde que $\mathcal{U}$ est la réunion des $\mathcal{U}_j$. Désignons par U la réunion des éléments de tous les $\mathcal{U}_j$ et par V la réunion des éléments de $\mathcal{U}$ n'appartenant à aucun des $\mathcal{U}_j$. Les ensembles U et V sont des ouverts non vides recouvrant X. Ils sont disjoints par construction ce qui contredit la connexité de X et démontre du même coup le théorème.

(3) Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte connexe

PROPOSITION 1. *Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte connexe X est de génération finie.*

Recouvrons X par des domaines de cartes $V_0, \ldots, V_n$ isomorphes à des boules, centrées en des points $x_0, \ldots, x_n$. Pour tout entier j compris entre 0 et n, on désigne par U_j une boule de centre x_j relativement compacte dans V_j et l'on suppose que $U_0, \ldots, U_n$ recouvrent encore X.

Pour tout couple d'entiers (j, k), on recouvre $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$ par des domaines de cartes $U_1^{j,k}, \ldots, U_{n_{j,k}}^{j,k}$ isomorphes à des boules, centrées en des points $x_1^{j,k}, \ldots, x_{n_{j,k}}^{j,k}$ de $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$. Remarquons que $n_{j,k}$ est nul si $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$ est vide.

Pour tout entier l compris entre 1 et $n_{j,k}$, on désigne par $\alpha_l^{j,k}$ un chemin joignant x_j à $x_l^{j,k}$ dans V_j et par $\beta_l^{j,k}$ un chemin joignant $x_l^{j,k}$ à x_k dans V_k. On pose

$$\gamma_l^{j,k} = \alpha_l^{j,k} \beta_l^{j,k} .$$

Nous allons montrer que tout lacet c de X au point x_0 est homotope à un produit de chemins $\gamma_l^{j,k}$, ce qui démontrera l'assertion.

Le lacet c se décompose en un produit de chemins $c_1, \ldots, c_p$ dont chacun est contenu dans l'un des ouverts $U_0, \ldots, U_n$.

Désignons par c_m et c_{m+1} deux tels chemins. Le premier joint un point a_{m-1} à un point a_m dans U_j, le second le point a_m à un point a_{m+1} dans U_k. Il existe un ensemble ouvert $U_l^{j,k}$ contenant a_m. On choisit alors un chemin α joignant a_{m-1} à x_j dans U_j, un chemin β joignant x_k à a_{m+1} dans U_k et un chemin γ joignant $x_l^{j,k}$ à a_m dans $U_l^{j,k}$. Le chemin $\alpha\, \alpha_l^{j,k}\, \gamma$ est homotope au chemin c_m dans V_j et le chemin $\gamma^{-1}\beta_l^{j,k}\beta$ est homotope au chemin c_{m+1} dans V_k. Par conséquent, le chemin $\alpha\, \gamma_l^{j,k}\beta$ est homotope au chemin $c_m c_{m+1}$ dans X. On en déduit aisément l'assertion.