Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: (2) Théorème de normalisation
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

(2) Théorème de normalisation

Tous les anneaux (et tous les corps) considérés sont commutatifs, avec élément unité.

THÉORÈME 1 (Elément primitif). *Soit K un corps de caractéristique zéro et soit L une extension finie de K. Il existe alors un élément α de L tel que L soit engendré par α sur K.*

De manière plus précise, pour toute partie infinie S de K et tout système de générateurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de L sur K, il existe des éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de S tels que l'élément

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_n\alpha_n$$

engendre L sur K.

Par récurrence sur n, on se ramène immédiatement au cas où L est engendré par deux éléments α_1 et β_1. Désignons par p et q les polynômes minimaux de α_1 et β_1 respectivement dans $K[T]$. Dans une extension convenable de K, on peut écrire

$$p = \prod_{1 \leqq j \leqq m} (T - \alpha_j) \quad \text{et} \quad q = \prod_{1 \leqq j \leqq n} (T - \beta_j) .$$

Les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (resp. $\beta_1, \ldots, \beta_n$) étant deux à deux distinctes, il existe un élément λ de S tel que

$$\alpha_j + \lambda\beta_k \neq \alpha_1 + \lambda\beta_1 \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant m \qquad 2 \leqslant k \leqslant n .$$

Posons

$$\alpha = \alpha_1 + \lambda\beta_1$$

et montrons que L est engendré par α. Il suffit évidemment de montrer que β_1 appartient à $K(\alpha)$. Par construction, le plus grand commun diviseur des polynômes $q(T)$ et $p(\alpha - \lambda T)$ de $K(\alpha)[T]$ est le polynôme $T - \beta_1$. Ceci montre que le polynôme minimal de β_1 dans $K(\alpha)[T]$ est $T - \beta_1$, d'où l'assertion.

LEMME 5. *Soit B un anneau et soit A un sous-anneau de B. Pour tout élément x de B, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe un entier naturel n et des éléments $a_1, \ldots, a_n$ de A tels que

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 .$$

(2) Il existe un sous-A-module M non nul de type fini dans B tel que M contienne xM.

Supposons (1) vérifiée et désignons par M le sous-module de B engendré par $1, x, \ldots, x^{n-1}$. Il est clair que xM est contenu dans M.

Réciproquement, supposons (2) vérifiée et désignons par $m_1, \ldots, m_n$ des générateurs de M. Il existe une famille $(a_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$ d'éléments de A telle que

$$xm_j = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{jk} m_k \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant n .$$

Ceci peut s'écrire

$$\begin{bmatrix} x - a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & x - a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ . \\ . \\ . \\ m_n \end{bmatrix} = 0$$

et puisque les éléments $m_1, \ldots, m_n$ ne sont pas tous nuls, le déterminant de la matrice de gauche fournit la relation cherchée.

On dit que x est *entier sur* A s'il vérifie les conditions du lemme 5. On dit que B est *entier sur* A si tous ses éléments sont entiers sur A.

On appelle *fermeture intégrale de* A *dans* B l'ensemble des éléments de B entiers sur A.

LEMME 6. *Soient* C *un anneau,* B *un sous-anneau de* C *et* A *un sous-anneau de* B.

(1) Supposons que B *soit une* A*-algèbre de type fini. Pour que* B *soit entier sur* A, *il faut et il suffit que ce soit un* A*-module de type fini.*

(2) Si C *est entier sur* B *et* B *entier sur* A, *alors* C *est entier sur* A.

(3) La fermeture intégrale A' *de* A *dans* B *est un sous-anneau de* B. *Tout élément de* B *entier sur* A' *appartient à* A'.

La première assertion résulte immédiatement des définitions. Démontrons la seconde. Soit x un élément de C et soit $b_1, \ldots, b_n$ des éléments de B tels que

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0 .$$

La sous-algèbre B_1 de B engendrée par $b_1, \ldots, b_n$ est un A-module de type fini d'après (1). On en déduit que $B_1[x]$ est un A-module de type fini. Comme la multiplication par x envoie $B_1[x]$ dans lui-même, ceci démontre l'assertion.

Démontrons (3). Soient x et y des éléments de A' et soient M et N deux A-modules de type fini dans B tels que M contienne xM et N contienne yN. Il suffit de remarquer que la multiplication par $x + y$, $x - y$ et xy envoie le A-module de type fini MN dans lui-même. La deuxième assertion résulte de (2): tout élément de B entier sur A' est entier sur A.

LEMME 7. *Soit A un anneau factoriel et soit L une extension finie de son corps des fractions K.*

(1) La fermeture intégrale de A dans K est égale à A.

(2) Le polynôme minimal de tout élément x de L entier sur A appartient à $A[T]$.

Désignons par $\frac{x}{y}$ un élément de K et par $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de A tels que

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1 \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \ldots + a_n = 0 .$$

On peut écrire cette relation sous la forme

$$x^n + a_1 y x^{n-1} + \ldots + a_n y^n = 0 .$$

On en déduit aisément que tout élément irréductible de A divisant y divise aussi x, ce qui démontre la première assertion.

Désignons par p le polynôme minimal de x dans $K[T]$ et par r un polynôme monique de $A[T]$ tel que $r(x)$ soit nul. Il existe un polynôme q de $K[T]$ tel que

$$r = pq .$$

Dans une extension convenable $\tilde{K}$ de K, on peut écrire

$$p = \prod_{1 \leq j \leq m} (T - \alpha_j) \qquad q = \prod_{1 \leq k \leq n} (T - \beta_k) .$$

Par définition, les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$ appartiennent à la fermeture intégrale A' de A dans $\tilde{K}$. Ceci montre que les coefficients de p (et de q) sont entiers sur A (lemme 6). L'assertion résulte alors de (1).

THÉORÈME 2 (Noether). *Soit κ un corps infini et soit B une κ-algèbre intègre. On suppose que B est engendrée par des éléments $y_1, \ldots, y_m$ et que le degré de transcendance sur κ du corps des fractions L de B est égal à n.*

Il existe alors une famille $(a_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m}$ *d'éléments de* κ *telle que* B *soit entier sur* $\kappa\,[x_1, \ldots, x_n]$, *où l'on a posé*

$$x_j = \sum_{1 \leq k \leq m} a_{jk} y_k \quad \textit{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant n\,.$$

La démonstration va se faire par récurrence sur $m - n$, l'assertion étant triviale si n est égal à m.

Supposons donc $m - n$ strictement positif. Il existe un polynôme p non nul de $\kappa\,[T_1, \ldots, T_m]$ tel que

$$p(y_1, \ldots, y_m) = 0\,.$$

Ce polynôme s'écrit d'une manière et d'une seule

$$p = p_0 + \ldots + p_r$$

où p_j est homogène de degré j et p_r non nul. Désignons par $a_1, \ldots, a_{m-1}$ des éléments de κ tels que $p_r\,(a_1, \ldots, a_{m-1}, 1)$ soit non nul et posons

$$t_1 = y_1 - a_1 y_m, \ldots, \; t_{m-1} = y_{m-1} - a_{m-1} y_m, \; t_m = y_m\,.$$

Par substitution, on voit que l'on a

$$t_m^r\, p_r\,(a_1, \ldots, a_{m-1}, 1) + q\,(t_1, \ldots, t_m) = 0$$

où q est un polynôme de degré strictement inférieur à r en t_m. Ceci montre que t_m est entier sur l'anneau $\kappa\,[t_1, \ldots, t_{m-1}]$. Le lemme 6 et l'hypothèse de récurrence fournissent alors le résultat.

Conservons les notations du théorème 2. On désigne par A l'anneau $\kappa\,[x_1, \ldots, x_n]$ et par K son corps des fractions. Il existe des éléments $x_{n+1}, \ldots, x_m$ de B qui engendrent le A-module B et le théorème de l'élément primitif implique qu'il existe une combinaison linéaire α de $x_{n+1}, \ldots, x_m$ telle que

$$L = K(\alpha)\,.$$

Désignons par p le polynôme minimal de α. C'est un polynôme monique irréductible appartenant à $A\,[T]$ (lemme 7). Son discriminant Δ est non nul (lemme 4).

LEMME 8. *La multiplication par* Δ *envoie* B *dans* $A\,[\alpha]$.

Dans une extension convenable $\tilde{K}$ de K, on peut écrire

$$p = \prod_{1 \leq j \leq r} (T - \alpha_j) \quad \text{avec} \quad \alpha = \alpha_1\,.$$

Tout élément x de L s'écrit d'une manière et d'une seule

$$x = \sum_{0 \leq k \leq r-1} \xi_k \alpha^k$$

avec $\xi_0, \ldots, \xi_{r-1}$ dans K. On pose alors

$$x^{(j)} = \sum_{0 \leq k \leq r-1} \xi_k \alpha_j^k$$

pour tout entier j compris entre 1 et r. Le déterminant de ce système d'équations linéaires est donné par la formule

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & . & . & . & \alpha_1^{r-1} \\ 1 & \alpha_2 & . & . & . & \alpha_2^{r-1} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & \alpha_r & . & . & . & \alpha_r^{r-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq r} (\alpha_k - \alpha_j)$$

Le carré de ce déterminant n'est autre que le discriminant Δ. Ceci montre que le système d'équations ci-dessus admet une solution et une seule

$$\xi_k = \frac{1}{D} \sum_{1 \leq j \leq r} a_{k,j} x^{(j)} .$$

Notons que D et les éléments $a_{k,j}$ appartiennent à la fermeture intégrale A' de A dans $\tilde{K}$. D'autre part, si x est entier sur A, il en est ainsi des éléments $x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}$ et par conséquent de

$$\Delta \xi_k = D \sum_{1 \leq j \leq r} a_{k,j} x^{(j)} .$$

Comme ce dernier élément appartient à K, il est dans A (lemme 7). Le lemme en découle aussitôt.