Les opérations d'Adams ont été introduites dans le contexte des schémas par R. Swan. (*Proc. Symp. Pure Math. A.M.S.*, vol. XXI, Univ. of Wisconsin (1971), 155-159.)

Enfin, les opérations d'Adams proprement dites ont été introduites en topologie par J.F. Adams. (*Ann. of Math.* 75 (1962), 603-632.)

§ 1. L'ANNEAU DES REPRÉSENTATIONS VIRTUELLES.

Soient G un groupe (multiplicatif) et F un corps commutatif. On notera FG l'algèbre de groupe de G sur F, i.e. l'espace vectoriel ayant pour base les éléments de G muni de la multiplication induite par la multiplication dans G.

Une représentation de G sur F est une classe d'isomorphie de FG-modules (à gauche) de dimension finie sur F. Si V est un FG-module (de dimension finie), on dira par abus de langage que V est une représentation.

Soient V un FG-module et $e_1, ..., e_n$ une F-base de V. L'action d'un élément $s \in G$ sur V exprimée dans cette base, i.e.

$$s \,.\, e_j = \sum_{i=1}^{n} S_{ij}\, e_i$$

fournit un homomorphisme $\rho : G \to GL_n(F)$ qui associe à s la matrice inversible $\rho(s) = (S_{ij})$. L'homomorphisme ρ est appelé la forme matricielle de la représentation V associée à la base choisie.

Soient G un groupe (fini) et F un corps commutatif. A ces données on associe l'anneau $R(FG)$ des F-représentations virtuelles de G dont nous rappelons brièvement la construction.

Soit L la groupe abélien libre ayant pour **Z**-base l'ensemble des représentations de G sur F. Soit L_0 le sous-groupe de L engendré par les éléments de la forme $V - V' - V''$ chaque fois qu'il existe une suite exacte $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ de FG-modules.

DÉFINITION. $R(FG) = L/L_0$. *Un élément de* $R(FG)$ *s'appelle une* F*-représentation virtuelle de* G.

La classe de V dans $R(FG)$ sera notée $[V]$, ou même quelquefois simplement V.

Remarques. On voit facilement que tout élément de $R(FG)$ peut s'écrire sous la forme $[U] - [V]$, où U et V sont des représentations de G sur F. Rappelons que si la caractéristique de F ne divise pas l'ordre de

G, l'existence d'une suite exacte $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ entraîne que $V \cong V' \oplus V''$. Ceci n'est plus vrai si caract (F) divise l'ordre de G et il est important pour la suite de ne pas faire d'hypothèse inutilement restrictive sur le corps F.

La structure d'anneau sur $R(FG)$ est fournie par le produit tensoriel sur F des représentations. Si V_1 et V_2 sont deux FG-modules, G opère sur $V_1 \otimes_F V_2$ par $s \,.\, (v_1 \otimes v_2) = sv_1 \otimes sv_2$, $s \in G$, et on vérifie sans difficulté que cette formule fournit bien une structure de FG-module sur $V_1 \otimes_F V_2$. On obtient ainsi un produit sur L et il est immédiat de vérifier que L_0 est un idéal. Le produit tensoriel induit donc un produit sur $R(FG)$.

Comme $V_1 \otimes_F V_2 \cong V_2 \otimes_F V_1$, l'anneau $R(FG)$ est commutatif. Le corps F, muni de la structure de FG-module « triviale » telle que $sa = a$ pour tout $a \in F$, représente l'élément neutre pour la multiplication dans $R(FG)$. On écrira $[V_1] \,.\, [V_2]$ ou $V_1 \,.\, V_2$ pour le produit dans $R(FG)$.

La structure *additive* de $R(FG)$ est facile à expliciter:

DÉFINITION. Un FG-module S est dit *simple* ou *irréductible* s'il est non-nul et s'il ne possède pas d'autres sous-modules que 0 et S lui-même.

THÉORÈME. *Soient G un groupe fini et F un corps commutatif. L'ensemble $S(FG)$ des classes d'isomorphie de FG-modules simples est un ensemble fini. Le groupe $R(FG)$ est abélien libre avec pour base l'ensemble $S(FG)$.*

Preuve. Soient S un FG-module simple et $v \in S$, $v \neq 0$. L'application $FG \to S$ donnée par $a \to av$ définit un homomorphisme de FG-modules (FG étant regardé comme FG-module à gauche par la multiplication dans l'anneau FG.) Cet homomorphisme est surjectif puisque S est simple. On voit donc que S apparaît comme facteur de composition d'une suite de Jordan-Hölder pour le module FG. Ainsi, il y a au plus l classes d'isomorphisme de FG-modules simples, où l est la longueur d'une suite de Jordan-Hölder pour le module FG. (Pour le théorème de Jordan-Hölder, voir [Curtis-Reiner] cité dans l'introduction, § 13.)

Soit maintenant R le groupe abélien libre sur l'ensemble fini $S(FG)$ des représentations irréductibles.

En associant à tout élément de $S(FG)$ sa classe dans $R(FG)$, on obtient un homomorphisme

$$f : R \to R(FG).$$

Inversement, on définit $g : R(FG) \to R$ comme suit. Si V est un FG-module (de dimension finie) et $V = V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_k \supset V_{k+1} = 0$ une suite de Jordan-Hölder pour V, on pose

$$g_0(V) = \sum_{i=1}^{k} S_i ,$$

où S_i est la classe d'isomorphie du facteur simple V_i/V_{i+1}, $i = 1,\ldots, k$.

D'après le théorème de Jordan-Hölder, $g_0(V)$ est un élément de R qui ne dépend que de la classe d'isomorphie de V. On a donc un homomorphisme $g_0 : L \to R$. On constate que g_0 s'annule sur les générateurs de L_0, donc sur L_0 tout entier, et induit par conséquent un homomorphisme $g : R(FG) \to R$.

La vérification de $gf = id.$ est immédiate. Celle de $fg = id.$ facile.

Exemple. Pour tout $\chi \in \mathrm{Hom}(G, F^\cdot)$, on définit sur F une structure de FG-module en posant $s\,.\,v = \chi(s)\,v$, $v \in F$. Ce module sera noté F_χ ou $F(\chi)$. Il est évidemment simple. On a $F(\chi_1) \otimes F(\chi_2) = F(\chi_1 . \chi_2)$. Le cas où G est abélien d'exposant n, disons, et où F contient les racines du polynôme $X^n - 1$ est fondamental pour la théorie. Dans ce cas les classes d'isomorphie des FG-modules simples $F(\chi)$, $\chi \in \mathrm{Hom}(G, F^\cdot)$ forment une liste complète sans répétition des F-représentations irréductibles de G. Donc, $R(FG)$ pour G abélien et avec l'hypothèse faite sur F s'identifie à l'anneau de groupe $\mathbf{Z}\,X$, où $X = \mathrm{Hom}(G, F^\cdot)$.

Revenons au cas général. Si $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes, f s'étend (de manière unique) à un homomorphisme d'algèbre $f : FG \to FG'$ et tout FG'-module V devient un FG-module par $\lambda\, v = f(\lambda)\, v$, $\lambda \in FG$, $v \in V$. Cette construction fournit un homomorphisme d'anneau $f^* : R(FG') \to R(FG)$ dit de *restriction.* (On a également un homomorphisme *induit* $f^* : R(FG) \to R(FG')$ pour la structure additive de ces anneaux, et donné par $V \to FG' \otimes_{FG} V$. On ne s'en servira pas.)

Si $F \to E$ est une extension de corps, tout FG-module V fournit un EG-module $E \otimes_F V$ que l'on notera aussi EV. On obtient ainsi un homomorphisme d'anneaux $i : R(FG) \to R(EG)$ dit d'*extension des scalaires.*

L'anneau $R(FG)$ est encore muni d'une involution dont nous aurons besoin pour définir les opérations d'Adams d'indices négatifs.

Soit V un FG-module. On considère le dual $V^* = \mathrm{Hom}_F(V, F)$ qui est muni d'une structure de FG-module définie par la formule

$$(a\,.f)(v) = \sum_{s \in G} a_s f(s^{-1}v) ,$$
$$a = \sum_{s \in G} a_s\,.\,s \in FG,\ v \in V .$$

La classe d'isomorphisme de V^* ne dépend que de celle de V. La représentation V^* s'appelle la *duale* de V. On a $V^{**} \cong V$, canoniquement.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'opération * induit un automorphisme involutif

$$* : R(FG) \to R(FG)$$

qui commute aux homomorphismes $f^* : R(FG') \to R(FG)$ et $f_* : R(FG) \to R(FG')$ pour $f : G \to G'$ et $i : R(FG) \to R(EG)$.

Deux théorèmes classiques jouent un rôle essentiel dans la suite.

THÉORÈME I. *Soit* $F \to E$ *une extension quelconque de corps commutatifs. L'homomorphisme* $i : R(FG) \to R(EG)$ *d'extension des scalaires est injectif.*

Soit p un nombre premier. Un sous-groupe cyclique de G sera dit *p-régulier* si son ordre est premier à p. Tout sous-groupe cyclique est 0-régulier.

THÉORÈME II. *Soient* G *un groupe fini et* F *un corps. Soit* $\mathscr{C}$ *la famille des sous-groupes cycliques* p*-réguliers de* G, *où* $p = \text{caract}(F)$. *L'homomorphisme*

$$\text{res} : R(FG) \to \prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC),$$

produit des restrictions $R(FG) \to R(FC)$, *est injectif.*

Ces théorèmes constituent un analogue du «splitting principle» en topologie et seront utilisés de façon similaire pour démontrer certaines propriétés des opérations d'Adams.

Pour démontrer les théorèmes I et II, les faits fondamentaux sont les suivants.

LEMME 1. *Soient* G *un groupe fini et* $F \subset E$ *une extension de corps quelconque. On a* $E \otimes_F \text{rad}\, FG = \text{rad}\, EG$, *où* rad *dénote le radical.*

Soit V un FG-module. On appelle caractère de V la fonction F-linéaire $\chi : FG \to F$ définie par

$$\chi(s) = \text{Trace}\, \rho(s),$$

où $\rho(s)$ est la transformation F-linéaire $V \to V$ associée à s, i.e. $\rho(s)(v) = s \cdot v$.

LEMME 2. *Soient* G *un groupe fini et* $X(FG)$ *le sous-espace de* $\text{Hom}_F(FG, F)$ *engendré par les caractères des* F*-représentations de* G. *Les carac-*

tères $\chi_1, \ldots, \chi_r$ *des représentations irréductibles forment une F-base de* $X(FG)$.

Esquisses de démonstrations.

Soit k un corps premier, i.e. $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{F}_p$ pour p premier. D'après le théorème de Wedderburn, [Curtis-Reiner], § 26, l'algèbre semi-simple $kG/\mathrm{rad}\, kG$ se décompose en produit

$$kG/\mathrm{rad}\, kG \cong D_1(n_1) \times \ldots \times D_s(n_s)$$

d'algèbre de matrices $D_i(n_i)$ sur des corps gauches D_i.

Les corps gauches D_i sont munis d'une forme trace non-dégénérée, i.e. $(x, y) \to \mathrm{Trace}_{D_i/k}(x.y)$ est bilinéaire de noyau nul.

En effet, pour $k = \mathbf{Q}$ c'est évident et dans le cas où $k = \mathbf{F}_p$, les D_i sont des corps finis, donc en fait commutatifs et galoisiens, donc séparables sur $\mathbf{F}_p$.

On vérifie alors facilement que pour tout corps $F \supset k$, les F-algèbres $F \otimes_k D_i$ ont également une trace sur F non-dégénérée et sont donc semi-simples.

Il en résulte que $F \otimes_k (kG/\mathrm{rad}\, kG) \cong FG/(F \otimes_k \mathrm{rad}\, kG)$ est semi-simple. Donc, $\mathrm{rad}\, FG \subset F \otimes_k \mathrm{rad}\, kG$. Comme l'inclusion inverse est évidente, on a $F \otimes_k \mathrm{rad}\, kG = \mathrm{rad}\, FG$. Le lemme 1 s'ensuit immédiatement.

De plus, le fait que la forme trace sur F soit non-dégénérée dans $F \otimes_k D_i$ entraîne aussi que dans la décomposition de Wedderburn

$$FG/\mathrm{rad}\, FG \cong K_1(n_1) \times \ldots \times K_r(n_r),$$

chaque corps (gauche) K_i, $i = 1, \ldots, r$, possède une forme trace sur F non-dégénérée. En particulier, il existe des éléments $\alpha_i \in K_i$ tels que $\mathrm{trace}_F(\alpha_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$.

Pour démontrer le lemme 2, on observe d'abord que les caractères $\chi_1, \ldots, \chi_r$ des FG-modules simples engendrent $X(FG)$. Il reste alors à démontrer que ces caractères sont linéairement indépendants sur F. Soit S_i le $K_i(n_i)$-module formé des matrices $n_i \times n_i$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf la première. On sait que $S_1, \ldots, S_r$ regardés comme FG-modules forment une liste complète de FG-modules simples non-isomorphes.

Soient maintenant $a_i \in FG$ des éléments se projettant sur $\alpha_i e_{11} \in K_i(n_i)$ et sur 0 dans les autres facteurs $K_j(n_j)$ pour $j \neq i$. (e_{11} dénote la matrice $n_i \times n_i$ de $K_i(n_i)$ dont tous les cœfficients sont nuls sauf celui d'indice (1, 1) qui est égal à 1.)

Un calcul de traces montre aisément que

$$\chi_i(a_j) = \delta_{ij} \,.\, \mathrm{trace}_F(\alpha_i) \,.$$

L'indépendance linéaire de $\chi_1, \ldots, \chi_r$ en résulte.

Démonstration du théorème I: $R(FG) \to R(EG)$ est injectif.

Il suffit de voir que si S et T sont deux FG-modules simples non-isomorphes, alors ES et ET sont semi-simples et sans facteur commun, i.e. ES somme directe de EG-modules simples S_i, ET somme directe de EG-modules simples T_j, et $S_i \not\cong T_j$ pour tout couple (i, j).

ES et ET sont semi-simples car ils sont annulés par $E \otimes$ rad FG. Donc, par rad EG, en vertu du lemme 1.

Pour vérifier qu'ils n'ont pas de facteur simple commun, il suffit de calculer $\mathrm{Hom}_{EG}(ES, ET) = 0$. Cela résulte de $\mathrm{Hom}_{EG}(ES, ET) = E \otimes_F \mathrm{Hom}_{FG}(S, T) = 0$.

Démonstration du théorème II: res : $R(FG) \to \prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC)$ est injectif.

Soit $\chi : R(FG) \to X(FG)$ l'application qui associe à une représentation V son caractère χ_V. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R(FG) & \to & X(FG) \\ \downarrow \text{res} & & \downarrow \text{res} \\ \prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC) & \to & \prod_{C \in \mathscr{C}} X(FC)\,, \end{array}$$

où $\mathscr{C}$ est l'ensemble des sous-groupes cycliques p-réguliers de G, p = caract F.

Si res $\chi_\alpha = 0$, cela veut dire que χ_α s'annule sur tous les éléments p-réguliers de G. Il en résulte que χ_α est identiquement nulle. En effet, tout élément x de G s'écrit $x = y \,.\, z$, où y et z commutent, y est p-régulier et z d'ordre une puissance de p. (Si mq est l'ordre de x, avec m premier à p et q une puissance de p, prendre $y = x^q$ et $z = x^m$.) Si V est une représentation de G, les valeurs propres de z sont toutes égales à 1. (C'est la seule racine p-ième de 1 dans F.) Donc les valeurs propres de $x = yz$ sont les mêmes que celles de y. Il en résulte que $\chi_V(x) = \chi_V(y)$, et $\chi_\alpha(x) = \chi_\alpha(y)$ pour tout $\alpha \in R(FG)$.

Donc, res $\chi_\alpha = 0$ entraîne $\chi_\alpha = 0$. Comme d'autre part $R(FG)$ est abélien libre avec pour **Z**-base les représentations irréductibles $S_1, \ldots, S_r$ et que $\chi_1 = \chi(S_1), \ldots, \chi_r = \chi(S_r)$ est une F-base de l'espace des caractères $X(FG)$ en vertu du lemme 2, on conclut que si res $\chi_\alpha = 0$, alors α est contenu dans $pR(FG)$.

Le noyau de res : $R(FG) \to \prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC)$ est donc contenu dans $pR(FG)$. Comme maintenant $\prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC)$ est sans torsion, on a

$$\operatorname{Ker}(\text{res}) = \cap_n p^n R(FG) = 0 .$$

Au § 5 nous aurons besoin de $K(FG)$ dont la définition sera alors rappelée, et du fait que si F est de caractéristique non-nulle, alors la flèche d'extension des scalaires $K(FG) \to K(EG)$ est une injection directe. La démonstration est donnée dans [Serre], page 136, où $K(FG)$ est noté $P_F(G)$. Nous ne la reproduisons pas.

§ 2. Puissances extérieures

Les puissances extérieures des FG-modules fournissent un élément de structure additionnel dans l'anneau $R(FG)$, appelé λ-structure qui nous permettra au paragraphe suivant de définir pour tout entier n un endomorphisme d'anneau

$$\Psi_n : R(FG) \to R(FG)$$

jouissant de propriétés analogues à celles des opérations d'Adams en topologie.

Soit V un FG-module, toujours de dimension finie. On notera $\lambda_m V$ la m-ième puissance extérieure de V. C'est le quotient de la puissance tensorielle $V^m = V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ (m facteurs) par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $v_1 \otimes \dots \otimes v_m$ avec $v_i = v_j$ pour au moins nu couple d'indices distincts (i, j).

L'action de G sur $\lambda_m V$ est induite de l'action de G sur V^m. On convient que $\lambda_0 V = F$ avec action triviale, et $\lambda_1 V = V$.

Il s'avère que les puissances extérieures λ_m, $m \geqq 0$, induisent des opérations

$$\lambda_m : R(FG) \to R(FG)$$

sur l'anneau des représentations virtuelles, et on a la formule habituelle

$$\lambda_m(\alpha + \beta) = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i \alpha) \cdot (\lambda_{m-i} \beta) .$$

Le point essentiel est le

Lemme. *Soit* $0 \to V_0 \to V_1 \to V \to 0$ *une suite exacte de* FG*-modules. Alors,*

$$[\lambda_m V_1] = \sum_{i=0}^{m} [\lambda_i V_0] \cdot [\lambda_{m-i} V]$$

dans $R(FG)$ *pour* $m = 0, 1, \dots$.