Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1976)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIVISIBILITÉ DE CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES
Autor: Serre, Jean-Pierre
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48187

DIVISIBILITÉ DE CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par Jean-Pierre SERRE

On connaît de nombreux exemples de fonctions arithmétiques $n \mapsto a_n$ jouissant de la propriété suivante: pour tout entier $m \geqslant 1$, l'ensemble des n tels que $a_n \equiv 0 \pmod{m}$ est de densité 1; autrement dit, on a

$$a_n \equiv 0 \pmod{m} \quad \text{pour « presque tout » entier } n .$$

Il en est notamment ainsi lorsque les a_n sont les coefficients d'une forme modulaire de poids entier sur un sous-groupe de congruence de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$: cela se démontre en appliquant la méthode de Landau [8] aux fonctions L d'Artin fournies par la théorie de Deligne [4]. Cette démonstration est esquissée dans la Note [23]. Je reprends ici la question, en donnant davantage de détails: les §§ 1 à 3 rappellent les résultats généraux de Landau, Watson, Raikov, Delange, ...; les §§ 4 à 5 appliquent ces résultats aux coefficients de formes modulaires, ainsi qu'à ceux de la fonction j; le § 6 contient divers compléments, rédigés sous forme d'exercices, avec esquisses de démonstrations.

A des changements mineurs près, le texte qui suit est extrait du Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU 1974/75. Je remercie les organisateurs de ce Séminaire de m'avoir autorisé à le reproduire.

TABLE DES MATIÈRES

§ 1. ENSEMBLES DE NOMBRES PREMIERS

Soit P un ensemble de nombres premiers. Considérons les propriétés suivantes:

(1.1) $$\sum_{p \in P} 1/p = +\infty ;$$

(1.2) P est de *densité* $\alpha > 0$, i.e. le nombre des $p \in P$ qui sont $\leqslant x$ est égal à $\alpha x/\log x + o(x/\log x)$ quand $x \to \infty$.

(1.3) P est *régulier* de densité $\alpha > 0$, au sens de Delange [3], i.e.

$$\sum_{p \in P} p^{-s} = \alpha \log 1/(s-1) + \theta_P(s),$$

où $\theta_P(s)$ se prolonge en une fonction holomorphe pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$.

(1.4) P est *frobénien* de densité $\alpha > 0$, i. e. il existe une extension finie galoisienne $K/\mathbf{Q}$, et une partie H du groupe $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ telles que

(a) H est stable par conjugaison,

(b) $|H|/|G| = \alpha$ (on note $|X|$ le nombre d'éléments d'un ensemble fini X),

(c) pour tout p assez grand, on a $p \in P \Leftrightarrow \sigma_p(K/\mathbf{Q}) \in H$, où $\sigma_p(K/\mathbf{Q})$ désigne la substitution de Frobenius [1] de p dans G (définie à conjugaison près lorsque p ne divise pas le discriminant de K).

PROPOSITION 1.5. *On a* (1.4) $\Rightarrow$ (1.3) $\Rightarrow$ (1.2) $\Rightarrow$ (1.1).

L'implication (1.2) $\Rightarrow$ (1.1) est facile. L'implication (1.3) $\Rightarrow$ (1.2) est prouvée dans [3], p. 57, comme conséquence d'un théorème taubérien. D'autre part, sous les hypothèses de (1.4), on a

(1.6) $$\sum_{p \in P} p^{-s} = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi} \bar{\chi}(H) \log L(s, \chi)^{1}) + g(s) ,$$

où:

χ parcourt l'ensemble des caractères irréductibles de G,

$L(s, \chi)$ est la fonction L d'Artin [1] relative à l'extension $K/\mathbf{Q}$ et au caractère χ,

[1]) Ici, comme au §2, la détermination choisie de « log » est celle que l'on obtient par prolongement analytique sur les horizontales à partir de la détermination « évidente » pour $\mathscr{R}(s) > 1$ (i. e. celle fournie par le développement en série — on peut aussi la caractériser par le fait qu'elle tend vers 0 quand $\mathscr{R}(s)$ tend vers $+\infty$).

g est une série de Dirichlet qui converge absolument pour $\mathscr{R}(s) > 1/2$ (donc est holomorphe pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$),

$$\bar{\chi}(H) = \sum_{h \in H} \bar{\chi}(h).$$

Il résulte alors des propriétés élémentaires des fonctions $L(s, \chi)$ que $\log L(s, \chi) = \delta_\chi \log 1/(s-1) + \theta_\chi(s)$, où $\delta_\chi = 0$ (resp. $\delta_\chi = 1$) si $\chi \neq 1$ (resp. si $\chi = 1$), et $\theta_\chi(s)$ est holomorphe pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$. La propriété (1.3) en résulte.

Exemples.

(1) Si a et m sont des entiers $\geqslant 1$ tels que $(a, m) = 1$, l'ensemble des nombres premiers p tels que $p \equiv a \pmod{m}$ est frobénien de densité $1/\varphi(m)$.

(2) L'ensemble des nombres premiers qui se décomposent complètement (resp. ont un facteur premier de degré 1) dans une extension finie de $\mathbf{Q}$ est frobénien de densité > 0.

(3) Soit τ la fonction de Ramanujan (cf. [6], [19], [27]). Si m est un entier $\geqslant 1$, l'ensemble des p tels que $\tau(p) \equiv 0 \pmod{m}$ est frobénien de densité $\alpha(m) > 0$; cela résulte de Deligne [4] (voir aussi [19], [27], ainsi que le §4 ci-après). Lorsque m est premier, on peut calculer $\alpha(m)$ grâce à [27]. On trouve:

$$\alpha(m) = \begin{cases} 1, 1/2, 1/4, 1/2, 1/2, 1/690 & \text{si } m = 2, 3, 5, 7, 23, 691 \\ m/(m^2-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque. Lorsque P est frobénien, on peut préciser un peu le comportement de la fonction $f_P(s) = \sum_{p \in P} p^{-s}$ à gauche de la droite critique $\mathscr{R}(s) = 1$:

PROPOSITION 1.7. *La fonction f_P se prolonge en une fonction holomorphe dans une région de la forme*

$$(1.8) \quad \begin{cases} \mathscr{R}(s) \geqslant 1 - b/\log^A T, & \text{avec } b, A > 0,\ T = 2 + |\mathscr{I}(s)| \\ \mathscr{I}(s) \neq 0 \quad \text{ou} \quad s \text{ réel} > 1, \end{cases}$$

et y admet une majoration

$$(1.9) \qquad |f_P(s)| = O(\log\log T) \quad \text{pour} \quad T \to \infty.$$

Cela se démontre de la manière suivante: vu (1.6), il suffit de prouver l'énoncé analogue pour $\log L(s, \chi)$; grâce au théorème d'induction de Brauer, on peut en outre supposer que χ est un caractère de degré 1 de

Gal (K/E), où E est un sous-corps de K. On peut alors appliquer à $\log L(s,\chi)$ les méthodes classiques de Hadamard et de La Vallée Poussin, cf. par exemple [10], p. 336-337. [En fait, [10] se borne à prouver l'existence d'une région (1.8) où $L = L(s,\chi)$ est holomorphe $\neq 0$, et où $|L'/L| = O(\log^A T)$. Pour passer de là à la majoration

$$|\log L(s,\chi)| = O(\log\log T),$$

on distingue deux cas, suivant que $\mathscr{R}(s)$ est ou non $\geqslant 1 + 1/\log^A T$. Dans le premier cas, on a:

$$|\log L(s,\chi)| \leqslant [E:Q] \log \zeta(\mathscr{R}(s)) \leqslant [E:Q]\, A \log\log T + O(1) = O(\log\log T).$$

Le deuxième cas se ramène au premier: on applique le théorème des accroissements finis au segment horizontal I_s joignant s au point s_0 tel que

$$\mathscr{I}(s_0) = \mathscr{I}(s), \quad \mathscr{R}(s_0) = 1 + 1/\log^A T,$$

et l'on obtient

$$|\log L(s,\chi)| \leqslant |\log L(s_0,\chi)| + |s - s_0| \sup_{\sigma \in I_s} |L'/L(\sigma,\chi)| = O(\log\log T) + O(1) = O(\log\log T).]$$

§2. THÉORÈMES DE DENSITÉ

2.1. *Définitions.* Soit E une partie de l'ensemble $\mathbf{N}^*$ des entiers > 0; on note E' le complémentaire $\mathbf{N}^* - E$ de E. Si $x \in \mathbf{N}^*$, on note $E(x)$ le nombre des $n \leqslant x$ qui appartiennent à E; on a $E(x) + E'(x) = x$. Lorsque E est l'ensemble des n satisfaisant à une relation R, on écrit aussi

$$N\{n \leqslant x : R(n)\}$$

à la place de $E(x)$.

On dit que E est de *densité* c si $\lim_{x\to\infty} E(x)/x = c$, autrement dit si

$$E(x) = cx + o(x) \quad \text{pour} \quad x \to \infty.$$

Soit P un ensemble de nombres premiers. Nous dirons que P est *associé* à E si, pour tout $p \in P$ et tout entier $m \geqslant 1$ non divisible par p, on a $pm \in E$.

THÉORÈME 2.2. *Si P est associé à E, et si P jouit de la propriété* (1.1), *à savoir* $\sum_{p\in P} 1/p = +\infty$, *alors E est de densité* 1.

Soit I une partie finie de P, et soit E_I l'ensemble des entiers de la forme pm, avec $p \in I$ et $m \geqslant 1$ non divisible par p. Le complémentaire E_I' de E_I est l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ tels que

$$n \not\equiv p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots,\ (p-1)p \pmod{p^2} \quad \text{pour tout } p \in I.$$

Sa densité est $c_I' = \prod_{p \in I} (1 - (p-1)/p^2)$. Mais, vu (1.1), le produit infini $\prod_{p \in P} (1 - (p-1)/p^2)$ diverge, i. e. tend vers 0. Les c_I' tendent donc vers 0, et comme E' est contenu dans tous les E_I', on a

$$\limsup E'(x)/x \leqslant \lim c_I' = 0,$$

d'où le fait que E' est de densité 0.

Le cas régulier. D'après (2.2), on a $E'(x) = o(x)$ pour $x \to \infty$. Nous allons voir que l'on peut préciser ce résultat, à condition de faire des hypothèses supplémentaires sur P. Tout d'abord:

THÉORÈME 2.3. *Supposons que P soit associé à E, et soit régulier de densité $\alpha > 0$. On a alors:*

(a) $E'(x) = O(x/\log^{\alpha} x)$ *si* $\alpha < 1$;

(b) $E'(x) = O(x^{1-\delta})$, *avec* $\delta > 0$, *si* $\alpha = 1$.

Disons d'autre part que E est *multiplicatif* s'il possède la propriété:

(M) *Si n_1 et n_2 sont des entiers $\geqslant 1$ premiers entre eux, on a*

$$n_1 n_2 \in E \Leftrightarrow \{n_1 \in E \quad \text{ou} \quad n_2 \in E\}.$$

THÉORÈME 2.4. *Supposons E multiplicatif, et soit P l'ensemble des nombres premiers appartenant à E. Alors:*

(a) *Si P est régulier de densité α, avec $0 < \alpha < 1$, on a*

$$E'(x) \sim cx/\log^{\alpha} x, \quad \text{avec} \quad c > 0.$$

(b) *Si P est régulier de densité 1, on a*

$$E'(x) = O(x^{1-\delta}), \quad \text{avec} \quad \delta > 0.$$

(Noter qu'il résulte de (M) que P est associé à E.)

Démonstration de (2.4) (d'après Raikov, Wintner, Delange). — Posons $b_n = 0$ si $n \in E$, et $b_n = 1$ si $n \in E'$, de sorte que:

$$E'(x) = \sum_{n \leqslant x} b_n ;$$

la condition (M) signifie que b_n est une fonction *multiplicative* de n. On a $b_1 = 1$ (mis à part le cas trivial où $E' = \varnothing$). Considérons la série de Dirichlet

$$f(s) = \sum b_n n^{-s} = \sum_{n \in E'} n^{-s},$$

qui converge absolument pour $\mathscr{R}(s) > 1$. On a

$$f(s) = \prod_p f_p(s), \quad \text{où} \quad f_p(s) = \sum_{p^m \in E'} p^{-ms}.$$

La série $f_p(s)$ commence par le terme $1 + p^{-s}$ si et seulement si p n'appartient pas à P. On peut donc écrire f sous la forme

$$f(s) = \prod_{p \notin P} (1 + p^{-s}) \prod_p h_p(s),$$

où le produit des h_p est absolument convergent pour $\mathscr{R}(s) > 1/2$. On a donc

$$\log f(s) = \sum_{p \notin P} p^{-s} + \theta_1(s), \tag{2.5}$$

où $\theta_1(s)$ est holomorphe et bornée dans tout demi-plan $\mathscr{R}(s) \geqslant c$, avec $c > 1/2$. Plaçons-nous dans le cas (a), i. e. supposons P régulier de densité α, avec $0 < \alpha < 1$; le complémentaire de P est régulier de densité $1 - \alpha$; vu (1.3), et la formule ci-dessus, on a

$$\log f(s) = (1 - \alpha) \log 1/(s-1) + \theta_2(s),$$

où $\theta_2(s)$ est holomorphe pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$. Revenant à f, on obtient

$$f(s) = \frac{1}{(s-1)^{1-\alpha}} h(s), \tag{2.6}$$

où $h(s) = \exp \theta_2(s)$ est holomorphe et $\neq 0$ pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$. D'après une variante du théorème taubérien de Ikehara (cf. [2], [3], [14], [15], [29]), ceci entraîne

$$\sum_{n \leqslant x} b_n \sim cx/\log^{\alpha} x, \quad \text{avec} \quad c = h(1)/\Gamma(1-\alpha), \tag{2.7}$$

d'où (2.4) dans le cas $\alpha < 1$. Si d'autre part $\alpha = 1$, le même argument montre que $f(s)$ est holomorphe pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$; comme c'est une série à coefficients positifs, il en résulte, d'après un lemme classique de Landau, qu'elle converge en un point $s = 1 - \delta$, avec $\delta > 0$; on en déduit aussitôt la majoration cherchée:

$$\sum_{n \leqslant x} b_n = O(x^{1-\delta}).$$

Démonstration de (2.3). Soit $E(P)$ l'ensemble des entiers de la forme pm, avec $p \in P$ et $m \geqslant 1$ premier à p. On a $E(P) \subset E$, d'où $E'(x) \leqslant E(P)'(x)$. D'autre part, $E(P)$ est multiplicatif, et son intersection avec l'ensemble des nombres premiers est P. En appliquant (2.4) à $E(P)$, on obtient

$$E(P)'(x) = O(x/\log^{\alpha} x) \qquad \text{dans le cas (a)},$$

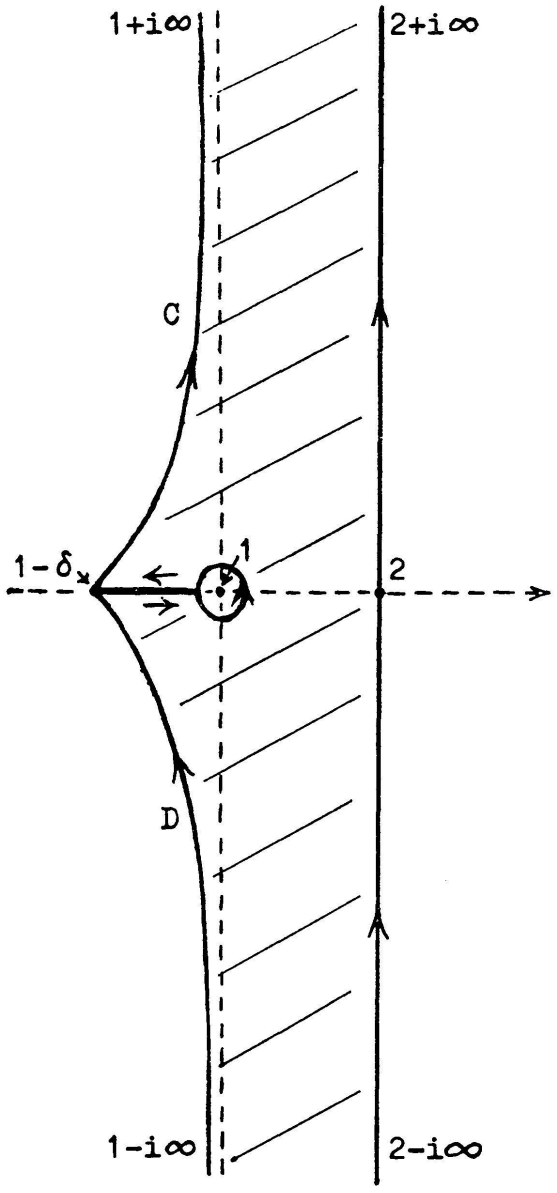
$$E(P)'(x) = O(x^{1-\delta}), \text{ avec } \delta > 0, \qquad \text{dans le cas (b)},$$

d'où (2.3) puisque $E'(x) \leqslant E(P)'(x)$.

Le cas frobénien. Revenons aux hypothèses de (2.4 a); on a

$$E'(x) = cx/\log^{\alpha} x + o(x/\log^{\alpha} x), \qquad \text{avec } c > 0.$$

Si P est *frobénien*, on peut remplacer le terme d'erreur $o(x/\log^{\alpha} x)$ par $O(x/\log^{1+\alpha} x)$, et même donner un *développement asymptotique* de $E'(x)$:



THÉORÈME 2.8. *Supposons que E soit multiplicatif, et que l'ensemble P des nombres premiers appartenant à E soit frobénien de densité α, avec $0 < \alpha < 1$. Il existe alors des nombres*

$$c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots, \quad \text{avec} \quad c_0 > 0,$$

tels que, pour tout entier $k \geqslant 0$, on ait

$$E'(x) = \frac{x}{\log^{\alpha} x}\left(c_0 + c_1/\log x + \ldots + c_k/\log^k x + O(1/\log^{k+1} x)\right).$$

La démonstration utilise une méthode due à Landau [8]; je me bornerai à la résumer, renvoyant à [8] ou [28] pour plus de détails:

Soit $f(s) = \sum b_n n^{-s} = \sum_{n \in E'} n^{-s}$,

comme ci-dessus. On montre au moyen de (2.5) et (1.7) que f se prolonge en une fonction holomorphe dans une région du type ci-contre (les branches infinies C et D étant définies par

$\mathscr{R}(s) = 1 - b/\log^A T$, avec $T = 2 + |\mathscr{I}(s)|$), et que l'on a dans cette région

$$|f(s)| = O(\log^A T) \quad \text{pour} \quad T \to \infty .$$

Posons alors

$$b(x) = \sum_{n \leq x} b_n \log(x/n) .$$

On vérifie que

$$b(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} f(s)\, x^s ds/s^2 .$$

La formule de Cauchy montre que cette intégrale est égale à l'intégrale analogue prise sur le bord gauche de la région considérée. Les contributions des branches infinies C et D sont négligeables devant $x/\log^N x$, quel que soit N; celle du cercle centré en 1 tend vers 0 avec le rayon du cercle. Le terme principal est donc fourni par les deux intégrales sur le segment horizontal joignant $1 - \delta$ à 1; ces dernières s'évaluent sans difficulté, à partir du développement de $f(s)$ au voisinage de $s = 1$. On trouve que:

$$b(x) = \frac{x}{\log^\alpha x} \left(d_0 + d_1/\log x + \ldots + d_k/\log^k x + O\left(1/\log^{k+1} x\right)\right) .$$

En appliquant ce résultat à $x + \delta x$, avec $\delta \sim 1/\log^{K+1} x$, et en retranchant, on obtient facilement l'estimation cherchée pour $E'(x) = \sum_{n \leq x} b_n$ (cf. [17], p. 277, ou [28], p. 723-724).

De façon plus précise, si le développement de $f(s)/s$ au voisinage de $s = 1$ est:

$$f(s)/s = \frac{1}{(s-1)^{1-\alpha}} \left(e_0 + e_1 (s-1) + \ldots + e_k (s-1)^k + \ldots\right) ,$$

on trouve pour $E'(x)$ le développement asymptotique

$$E'(x) = \frac{x}{\log^\alpha x} \left(c_0 + c_1/\log x + \ldots + c_k/\log^k x + O\left(1/\log^{k+1} x\right)\right),$$

avec

$$c_k = e_k/\Gamma(1 - k - \alpha) . \tag{2.9}$$

Remarques.

(1) En utilisant (1.6) on peut ramener le calcul des e_i et des c_i à celui, d'une part de séries absolument convergentes (donc évaluables numériquement), et d'autre part de *valeurs des dérivées des* $L(s, \chi)$ *au point* $s = 1$; pour un exemple de tel calcul, voir [24].

(2) La méthode de Landau suivie ci-dessus a l'avantage, non seulement de donner un développement asymptotique, mais encore de fournir un terme d'erreur que l'on peut *effectivement* majorer, pourvu bien sûr que l'on dispose de majorations effectives de $f(s)$, ce qui est le plus souvent faisable (mais rarement fait...). On ne peut rien déduire de tel des théorèmes taubériens à la Ikehara, du moins sous leur forme actuelle.

(3) A la place de l'intégrale de $f(s)\,x^s/s^2$, on pourrait songer à utiliser celle de $f(s)\,x^s/s$, qui conduit directement à $\sum_{n\leq x} b_n$. Malheureusement, il ne semble pas facile de majorer cette dernière intégrale sur les branches infinies C et D.

Voici maintenant une variante du théorème (2.8), dans le cas où l'ensemble P est frobénien de densité 1, i. e. de complémentaire fini:

THÉORÈME 2.10. *Supposons que E soit multiplicatif, et contienne tous les nombres premiers, à l'exception d'un nombre fini. Alors :*

(a) *On a* $E'(x) = O(x^{1/2})$.

(b) *Si l'ensemble des nombres premiers p tels que $p^2 \in E'$ est régulier de densité $\delta > 0$, on a*

$$E'(x) \sim cx^{1/2}/\log^{1-\delta} x\,, \qquad \text{avec} \quad c > 0\,.$$

L'assertion (a) est facile, et peut d'ailleurs se ramener à (b). Plaçons-nous donc dans le cas (b), et posons ici encore

$$f(s) = \sum_{n\in E'} n^{-s} = \sum b_n n^{-s}\,.$$

Les hypothèses faites sur E entraînent que

$$\log f(s) = \sum_{p^2\in E'} p^{-2s} + \theta_1(s) = \delta \log 1/(2s-1) + \theta_2(s)\,,$$

où les $\theta_i(s)$ sont holomorphes pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1/2$. Il en résulte que

$$f(s/2) = \frac{1}{(s-1)^\delta}\, h(s)\,,$$

où $h(s)$ est holomorphe et $\neq 0$ pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$. En appliquant à $f(s/2)$ les théorèmes taubériens cités plus haut (cf. [2], [14], [29]), on en déduit

$$\sum_{\sqrt{n}<x} b_n \sim c_1 x/\log^{1-\delta} x\,, \quad \text{avec } c_1 = h(1)/\Gamma(\delta)\,;$$

en remplaçant x par $x^{1/2}$, on obtient le résultat cherché:

$$E'(x) \sim cx^{1/2}/\log^{1-\delta} x\,, \qquad \text{avec } c = 2^{1-\delta} c_1\,.$$

Remarque. Dans le cas (b), si l'ensemble des p tels que $p^2 \in E'$ est *frobénien*, on peut utiliser la méthode de Landau pour obtenir un développement asymptotique de $E'(x)$.

Exemple. Prenons pour E l'ensemble des entiers de la forme pm, avec p premier, et $(p, m) = 1$; l'ensemble E' est formé des entiers $n \geqslant 1$ tels que $p \mid n \Rightarrow p^2 \mid n$ pour tout p premier; les hypothèses de (2.10 b) sont vérifiées avec $\delta = 1$. On a

$$\begin{aligned} f(s) &= \prod_p (1 + p^{-2s} + p^{-3s} + p^{-4s} + \ldots) = \prod_p \frac{1 - p^{-s} + p^{-2s}}{1 - p^{-s}} \\ &= \prod_p \frac{1 + p^{-3s}}{1 - p^{-2s}} = \prod_p \frac{1 - p^{-6s}}{(1 - p^{-2s})(1 - p^{-3s})} \\ &= \zeta(2s)\,\zeta(3s)/\zeta(6s)\,. \end{aligned}$$

D'après (2.10 b), on a $E'(x) \sim cx^{1/2}$, avec $c = \zeta(3/2)/\zeta(3)$. On connaît en fait des résultats bien plus précis, par exemple celui-ci (Bateman-Grosswald, *Illinois J. Math.*, 2, 1958):

$$E'(x) = cx^{1/2} + dx^{1/3} + O\left(x^{1/6} \exp\left(-A \log^B x\right)\right), \qquad \text{avec } A, B > 0\,.$$

§ 3. PREMIERS EXEMPLES

3.1. *Sommes de deux carrés.* C'est l'exemple traité initialement par Landau [8] (voir aussi [6], [24], [26]):

On prend pour E' l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ qui sont de la forme $a^2 + b^2$, avec $a, b \in \mathbf{Z}$ (ou $a, b \in \mathbf{Q}$, cela revient au même); on a ainsi:

$$E'(x) = N\{n \leqslant x : n = \boxed{2}\}\,.$$

Soit P l'ensemble des nombres premiers p tels que $p \equiv -1 \pmod 4$. On sait qu'un entier n appartient à E' si et seulement si, pour tout $p \in P$, l'exposant $v_p(n)$ de p dans n est pair. Il en résulte que le complémentaire E de E' est multiplicatif (au sens du § 2), et que P est l'ensemble des nombres premiers appartenant à E. Comme P est frobénien de densité 1/2, le théorème (2.8) montre l'existence de constantes $c_0, c_1, \ldots$ telles que

$$E'(x) = \frac{x}{\sqrt{\log x}}\left(c_0 + c_1/\log x + \ldots + c_k/\log^k x + O\left(1/\log^{k+1} x\right)\right)$$

pour tout $k > 0$. On trouvera dans Shanks [24] (rectifiant Ramanujan [6]

et Stanley [26]) une étude numérique de $E'(x)$ pour $x \leqslant 2^{26}$, ainsi qu'une détermination des deux premiers coefficients c_0 et c_1:

$$c_0 = \left(2 \prod_{p \in P} (1-p^{-2})\right)^{-1/2} = 0{,}76422365\ldots$$

$$c_1 = 0{,}44473893\ldots$$

3.2. *Fonctions multiplicatives.* Soit $n \mapsto a_n$ une fonction multiplicative à valeurs dans un anneau commutatif A, et soit P_a l'ensemble des nombres premiers p tels que $a_p = 0$. Il est clair que P_a est *associé* à l'ensemble E_a des entiers n tels que $a_n = 0$. En appliquant (2.2) on en déduit:

THÉORÈME 3.3. *Supposons que P_a soit régulier de densité $\alpha > 0$. On a alors*

$$N\{n \leqslant x : a_n \neq 0\} = \begin{cases} O(x/\log^{\alpha} x) & \text{si} \quad \alpha < 1 \\ O(x^{\gamma}) \quad \text{avec} \quad \gamma < 1 & \text{si} \quad \alpha = 1\,. \end{cases}$$

(Ainsi, « presque tous » les a_n sont nuls.)

Si A est intègre, E_a est multiplicatif. D'après (2.4) et (2.8), on en tire:

THÉORÈME 3.4. *Si A est intègre, et $\alpha < 1$, on a*

$$N\{n \leqslant x : a_n \neq 0\} \sim cx/\log^{\alpha} x\,, \quad \text{avec} \quad c > 0\,.$$

Si de plus P_a est frobénien, on a un développement asymptotique

$$N\{n < x : a_n \neq 0\} = \frac{x}{\log^{\alpha} x}(c_0 + c_1/\log x + \ldots)\,.$$

Donnons maintenant quelques exemples de fonctions multiplicatives auxquelles on peut appliquer les théorèmes 3.3 et 3.4:

3.5. *Coefficients de fonctions L.* — On prend pour A le corps $\mathbf{C}$, et pour a_n les coefficients d'une fonction L d'Artin

$$L(s, \chi) = \sum a_n n^{-s}\,,$$

où χ est un caractère de degré $d \geqslant 1$ d'un groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$, cf. §1. Faisons l'hypothèse:

(3.5.1.) Le sous-ensemble H de G formé des éléments $g \in G$ tels que $\chi(g) = 0$ est *non vide.*

L'ensemble P_a des nombres premiers p tels que $a_p = 0$ est alors frobénien de densité $\alpha = |H|/|G|$: cela résulte de (1.3) puisque $a_p = \chi(\sigma_p(K/\mathbf{Q}))$ pour tout p ne divisant pas le discriminant de K.

Toutes les conditions de (3.4) sont alors satisfaites (noter que $\alpha < 1$, car $|H| \neq |G|$, l'élément neutre n'appartenant pas à H). On en déduit un développement asymptotique de $N\{n \leqslant x:\ a_n \neq 0\}$.

Exemple. Soit k un corps de nombres de degré > 1; choisissons pour K une extension galoisienne de $\mathbf{Q}$ contenant k, et soit $G_k = \mathrm{Gal}(K/k)$ le sous-groupe de $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ correspondant à k. Prenons pour χ le caractère de la représentation de permutation de G dans G/G_k; on a

$$\chi(g) = \text{nombre d'éléments de } G/G_k \text{ laissés fixes par } g$$

et

$$L(s, \chi) = \zeta_k(s) = \sum \mathrm{N}\mathfrak{q}^{-s},$$

où $\mathfrak{a}$ parcourt les idéaux entiers $\neq 0$ du corps k. L'ensemble H de (3.5.1) est égal à

$$G - \{\text{union des conjugués de } G_k\}.$$

On a $H \neq \varnothing$ d'après un résultat élémentaire sur les groupes finis (cf. par exemple Bourbaki, A I.130, exerc. 6). Appliquant (3.5), on en déduit:

$$N\{n \leqslant x:\ n \text{ est norme d'un idéal de } k\} \sim \frac{x}{\log^{\alpha} x}(c_0 + c_1/\log x + \ldots),$$

résultat dû à Odoni (cf. [11], [12]). Lorsque $k = \mathbf{Q}(i)$, on retrouve l'exemple de Landau (3.1).

3.6. *Réduction* mod $\mathfrak{m}$ *de fonctions multiplicatives.* Soit $n \mapsto a_n$ une fonction multiplicative à valeurs dans l'anneau O_F des entiers d'un corps de nombres algébriques F. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal non nul de O_F, et notons $\tilde{a}_n$ l'image de a_n dans l'anneau fini $O_F/\mathfrak{m}$; soit $P_{a,\mathfrak{m}}$ l'ensemble des nombres premiers p tels que $a_p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$. Si l'on fait l'hypothèse:

(3.6.1) $\qquad P_{a,\mathfrak{m}}$ est régulier de densité $\alpha(\mathfrak{m}) > 0$,

on peut appliquer (3.3) à la fonction $n \mapsto \tilde{a}_n$, et l'on en déduit:

THÉORÈME 3.7. $N\{n \leqslant x:\ a_n \neq 0 \pmod{\mathfrak{m}}\} = O(x/\log^{\alpha(\mathfrak{m})} x)$,

ainsi que des résultats plus précis lorsqu'on suppose en outre que $P_{a,\mathfrak{m}}$ est frobénien et que $\mathfrak{m}$ est premier.

Exemples.

(a) (cf. Scourfield [17], [18]) On suppose que $p \mapsto \tilde{a}_p$ est une fonction *polynomiale* de p, i.e. qu'il existe un polynôme $\varphi_{\mathfrak{m}}(T)$, à coefficients dans $O_F/\mathfrak{m}$, tel que $\tilde{a}_p = \varphi_{\mathfrak{m}}(p)$ pour tout p. L'ensemble $P_{a,\mathfrak{m}}$ est alors frobénien; pour qu'il soit de densité > 0, il faut et il suffit que $\varphi_{\mathfrak{m}}$ « représente 0 », i.e. qu'il existe un entier t, premier à $\mathfrak{m}$, tel que $\varphi_{\mathfrak{m}}(t) = 0$. (*Exemple :* on prend $a_n = \sigma_{r,s}(n) = \sum_{dd'=n} d^r d'^s$, avec r pair et s impair, d'où

$$\varphi_{\mathfrak{m}}(T) = T^r + T^s, \text{ et } \varphi_{\mathfrak{m}}(t) = 0 \text{ pour } t = -1.)$$

(b) On suppose que la série $\sum a_n n^{-s}$ est associée à un « *système F-rationnel de représentations l-adiques* » (cf. [20], chap. I, § 2, ainsi que [4], [19], [27]). Cela entraîne l'existence d'une extension galoisienne finie $K_{\mathfrak{m}}$ de $\mathbf{Q}$, et d'une représentation linéaire

$$\rho_{\mathfrak{m}} : \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{m}}/\mathbf{Q}) \to \mathbf{GL}_N(O_F/\mathfrak{m})$$

telles que $\mathrm{Tr}\left(\rho_{\mathfrak{m}}(\sigma_p(K_{\mathfrak{m}}/\mathbf{Q}))\right) \equiv a_p \pmod{\mathfrak{m}}$ pour tout nombre premier p, à l'exception d'un nombre fini. Si l'on suppose en outre qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Im}(\rho_{\mathfrak{m}})$ tel que $\mathrm{Tr}(\sigma) = 0$, alors (3.6.1) est vérifié; on peut souvent prendre pour σ l'image par $\rho_{\mathfrak{m}}$ de la *conjugaison complexe* (« Frobenius réel »): c'est le cas pour les systèmes de représentations l-adiques définis par une forme modulaire (cf. § 4), ou par la cohomologie $H^i(X)$, i impair, d'une variété projective non singulière X définie sur $\mathbf{Q}$.

§ 4. EXEMPLES MODULAIRES

Pour les définitions et notations concernant les formes modulaires sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ et ses sous-groupes d'indice fini, on renvoie à [5], [19], [25], [27]. Rappelons seulement que l'on pose $q = e^{2\pi i z}$, avec $\mathscr{I}(z) > 0$.

4.1. *Formes de poids* 1 (cf. [5], § 9). — Soit $f = \sum a_n q^n$ une forme modulaire de poids 1 sur un sous-groupe de congruence de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$.

THÉORÈME 4.2.

(i) *Il existe* $\alpha > 0$ *tel que*

$$N\{n \leqslant x : a_n \neq 0\} = O(x/\log^{\alpha} x).$$

(ii) *Soit* N *un entier* $\geqslant 1$, *et soit* ε *un caractère de* $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$. *Supposons que* f *soit une forme modulaire de type* $(1, \varepsilon)$ *sur* $\Gamma_0(N)$, *et soit*

fonction propre des opérateurs de Hecke T_p (pour $p \nmid N$) *et* U_p (pour $p \mid N$), *cf.* [5], § 1. *Si* $f \neq 0$, *on a un développement asymptotique*

$$N\{n \leqslant x : a_n \neq 0\} = \frac{x}{\log^{\alpha} x}(c_0 + c_1/\log x + \ldots),$$

avec $0 < \alpha < 1$ *et* $c_0 > 0$.

Plaçons-nous d'abord dans le cas (ii). Quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer que $a_1 = 1$, et la fonction $n \mapsto a_n$ est alors multiplicative. De plus, d'après [5], il existe une extension galoisienne finie K_f de $\mathbf{Q}$, et une représentation

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(K_f/\mathbf{Q}) \to \mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$$

dont la fonction L d'Artin coïncide (à un nombre fini de facteurs près) avec la série de Dirichlet $\sum a_n n^{-s}$. Si l'on note G l'image de ρ_f, et H la partie de G formée des éléments de trace nulle, on a $H \neq \varnothing$ car H contient l'image de la conjugaison complexe ([5], n° 4.5) et $H \neq G$ car H ne contient pas 1. L'ensemble P_a des p tels que $a_p = 0$ est frobénien, et défini par H. Sa densité $\alpha = |H|/|G|$ est $\neq 0, 1$: toutes les conditions de (3.4) sont bien vérifiées. D'où (ii).

L'assertion (i) résulte de (ii) et du fait bien connu [1]) que toute forme modulaire est somme de fonctions $z \mapsto f_i(d_i z)$, où les d_i sont des entiers $\geqslant 1$ et les f_i des formes modulaires de type (ii).

Exemples.

(4.3) La forme

$$\theta^2 = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)^2 = \sum_{a,b \in \mathbf{Z}} q^{a^2+b^2}$$

est du type (ii), avec $N = 4$, et $\varepsilon(n) = (-4/n) = (-1)^{(n-1)/2}$; la représentation correspondante est la représentation réductible $1 \oplus \varepsilon$; on a $\alpha = 1/2$. On retrouve une nouvelle fois l'exemple de Landau (3.1).

(4.4) La forme

$$f = \Delta^{1/12}(12z) = q \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{12m})^2 = \sum_{\substack{a \equiv 1 \pmod 3 \\ b \equiv 0 \pmod 3 \\ a+b \equiv 1 \pmod 2}} (-1)^b q^{a^2+b^2}$$

est du type (ii), avec $N = 144$, et $\varepsilon(n) = (-4/n)$; la représentation correspondante est la représentation irréductible de degré 2 du groupe

[1]) Mais pour lequel je ne connais pas de référence satisfaisante, en dehors du cas des formes paraboliques qui se traite facilement grâce à la théorie des *formes primitives* (« newforms ») d'Atkin-Lehner-Miyake-Casselman-Li.

$\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(i, \sqrt[4]{12}), \mathbf{Q})$, groupe qui est isomorphe au groupe diédral $\mathbf{D}_4$ d'ordre 8 (E. Hecke, *Math. Werke*, p. 426 et 448); on a $\alpha = 3/4$.

4.5. *Remarques.* Il devrait être possible de préciser (i) en montrant que, si $f \neq 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$N\{n \leqslant x : a_n \neq 0\} \asymp x/\log^{\alpha} x,$$

et cela sans supposer que f soit fonction propre des opérateurs de Hecke. Peut-être y a-t-il même un développement asymptotique du genre

$$N\{n \leqslant x : a_n \neq 0\} = c_\alpha x/\log^{\alpha} x + c_\beta x/\log^{\beta} x + \ldots \quad (0 < \alpha < \beta < \ldots)?$$

Des questions analogues se posent pour $N\{n \leqslant x : a_n = a\}$, où a est un nombre complexe non nul donné.

4.6. *Réduction* mod $\mathfrak{m}$ *des formes de poids entier* (cf. [23]). — Soit $f = \sum a_n q^n$ une forme modulaire de poids entier $k \geqslant 1$ sur un sous-groupe de congruence de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. Supposons que les coefficients a_n de f appartiennent pour $n \geqslant 1$ à l'anneau O_F des entiers d'une extension finie F de $\mathbf{Q}$, et soit $\mathfrak{m}$ un idéal non nul de O_F. L'analogue « mod $\mathfrak{m}$ » de (4.2) est alors vrai, à de légères modifications près:

THÉORÈME 4.7.

(i) *Il existe* $\alpha(\mathfrak{m}) > 0$ *tel que*

$$N\{n \leqslant x : a_n \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}\} = O(x/\log^{\alpha(\mathfrak{m})} x).$$

(ii) *Supposons que* f *soit de type* (k, ε) *sur* $\Gamma_0(N)$, *soit fonction propre des* T_p (pour $p \nmid N$) *et des* U_p (pour $p \mid N$), *cf.* [5], § 1, *et que* $a_1 = 1$. *Supposons que* $\mathfrak{m}$ *soit un idéal premier. Alors:*

(ii$_1$) *Si la caractéristique du corps* $O_F/\mathfrak{m}$ *est différente de* 2, *ou s'il existe* $p \nmid 2N$ *tel que* $a_p \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$, *on a un développement asymptotique*

$$N\{n \leqslant x : a_n \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}\} = \frac{x}{\log^{\alpha(\mathfrak{m})} x}(c_0 + c_1/\log x + \ldots)$$

avec $0 < \alpha(\mathfrak{m}) < 1$ *et* $c_0 > 0$.

(ii$_2$) *Si la caractéristique de* $O_F/\mathfrak{m}$ *est* 2, *et si* $a_p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$ *pour tout* $p \nmid 2N$, *il existe* $c > 0$ *tel que*

$$N\{n \leqslant x : a_n \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}\} \sim cx^{1/2}.$$

Comme pour (4.2), le cas (i) se ramène au cas (ii). Supposons donc que f satisfasse aux conditions (ii), ce qui entraîne en particulier que la fonction

$n \mapsto a_n$ est multiplicative. Soit l la caractéristique du corps $O_F/\mathfrak{m}$. D'après Deligne (cf. [4], ainsi que [5], § 6), il existe une extension galoisienne finie $K = K_{f,\mathfrak{m}}$ de $\mathbf{Q}$, non ramifiée en dehors de lN, et une représentation semi-simple

$$\rho_{\mathfrak{m}} : \mathrm{Gal}\,(K/\mathbf{Q}) \to \mathbf{GL}_2(O_F/\mathfrak{m})$$

telles que, pour tout $p \nmid lN$, on ait

$$\mathrm{Tr}\,\rho_{\mathfrak{m}}(\sigma_p(K/\mathbf{Q})) \equiv a_p \pmod{\mathfrak{m}}$$

et

$$\det \rho_{\mathfrak{m}}(\sigma_p(K/\mathbf{Q})) \equiv p^{k-1}\,\varepsilon(p) \pmod{\mathfrak{m}}.$$

[Cela revient à dire que, pour tout $p \nmid lN$, le p-ième facteur de la série de Dirichlet $\sum a_n n^{-s}$ est congru (mod $\mathfrak{m}$) au p-ième facteur de la « série L » de la représentation $\rho_{\mathfrak{m}}$, cette dernière étant considérée comme une série de Dirichlet formelle à coefficients dans $O_F/\mathfrak{m}$.]

Notons encore G l'image de $\rho_{\mathfrak{m}}$ et H la partie de G formée des éléments de trace 0; on a $H \neq \varnothing$, car H contient l'image de la conjugaison complexe. Distinguons alors deux cas:

(ii$_1$) *On a* $H \neq G$. [C'est le cas si $l \neq 2$, car $1 \notin H$; c'est aussi le cas si $l = 2$, et si $\rho_{\mathfrak{m}}$ n'est pas la représentation unité, ce qui revient aussi à dire qu'il existe $p \nmid 2N$ tel que $a_p \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$. Ce sont bien là les conditions de (ii$_1$).] Comme l'ensemble $P_{a,\mathfrak{m}}$ des p tels que $a_p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$ est frobénien, et défini par H, on peut appliquer (3.4) avec $\alpha(\mathfrak{m}) = |H| / |G|$, et l'on obtient le développement asymtotique cherché.

(ii$_2$) *On a* $H = G$, ce qui signifie que $l = 2$, et que $\rho_{\mathfrak{m}}$ est la représentation unité. On a alors

$$a_p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}} \quad \text{et} \quad a_{p^2} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}} \quad \text{pour tout} \quad p \nmid 2N,$$

et l'on peut appliquer (2.10 b) avec $\delta = 0$, d'où le résultat cherché:

$$N\{n \leqslant x : a_n \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}\} \sim cx^{1/2}.$$

Exemples. Prenons $F = \mathbf{Q}$, de sorte que $O_F = \mathbf{Z}$ et $\mathfrak{m} = m\mathbf{Z}$, avec $m \geqslant 1$.

(4.8) Soit $\Phi(\mathbf{X}) = \Phi(X_1, \ldots, X_{2k})$ une forme quadratique positive non dégénérée à $2k$ variables, et à coefficients entiers. Soit a_n le *nombre de représentations de* n *par* Φ, i.e. le nombre de points $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^{2k}$ tels que $\Phi(\mathbf{x}) = n$. On sait que la série

$$\theta_\Phi = \sum a_n q^n = \sum_{\mathbf{x}} q^{\Phi(\mathbf{x})}$$

est modulaire de poids k. On peut donc lui appliquer (4.7 i); en particulier, quel que soit $m \geqslant 1$, les a_n sont « presque toujours » divisibles par m.

(4.9) La série

$$\Delta = q \prod_{r=1}^{\infty} (1-q^r)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, q^n$$

satisfait aux hypothèses de (4.7 ii) avec $N = 1$, $\varepsilon = 1$, $k = 12$. Si m est premier $\neq 2$, elle est de type (ii$_1$), avec un exposant $\alpha(m)$ facile à déterminer (cf. § 1, exemple 3); on en déduit

$$N\{n \leqslant x : \tau(n) \not\equiv 0 \pmod m\} = \frac{x}{\log^{\alpha(m)} x}(c_0 + c_1/\log x + \ldots).$$

[Ce résultat était connu (cf. Watson [28]) pour $m = 3, 5, 7, 691$, car la représentation ρ_m correspondante est alors réductible, ce qui se traduit par une congruence (mod m) reliant $\tau(n)$ à l'une des fonctions élémentaires $\sigma_{r,s}(n)$, cf. [19], [27]; dans ce cas, ainsi que dans celui où $m = 23$, on pourrait même calculer explicitement les valeurs des constantes $c_0, c_1, \ldots$, calcul qui paraît par contre fort difficile pour les autres valeurs de m, faute de renseignements sur les corps K_m qui interviennent, ainsi que sur leurs fonctions L d'Artin.]

Le cas $m = 2$ est exceptionnel: la représentation ρ_2 est la représentation unité, on se trouve dans le cas (ii$_2$). On a d'ailleurs

$$\tau(n) \equiv \begin{cases} 1 \pmod 2 & \text{si } n \text{ est un carré impair} \\ 0 \pmod 2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que

$$N\{n \leqslant x : \tau(n) \not\equiv 0 \pmod 2\} = \left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})\right] = \frac{1}{2}\sqrt{x} + O(1),$$

en accord avec (4.7 ii$_2$).

Questions.

(4.10) Il devrait être possible de préciser (4.7 i) en donnant une estimation de

$$N\{n \leqslant x : a_n \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}\}$$

ou même un développement asymptotique modulo $O(x/\log^N x)$, N arbitraire, de

$$N\{n \leqslant x : a_n \equiv \lambda \pmod{\mathfrak{m}}\} \qquad \text{pour } \lambda \text{ donné.}$$

Lorsque $n \mapsto a_n$ est multiplicative, Delange m'a signalé que l'on peut résoudre affirmativement la première question, en utilisant la méthode de [3], §§ 4, 5 (cf. exerc. 6.8, ainsi que Scourfield [17], [18]). L'estimation obtenue est

$$N\{n \leqslant x : a_n \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}\} \quad \sim \quad cx(\log\log x)^h/\log^\alpha x\,,$$

avec $c > 0$, $\alpha > 0$, h entier $\geqslant 0$ (mis à part un cas exceptionnel, analogue à (4.7 ii$_2$), où l'on a une majoration en $x^{1/2}$).

Le cas général devrait être analogue, à cela près qu'il y intervient, non seulement les $x(\log\log x)^h/\log^\alpha x$, mais aussi leurs produits par les termes oscillants

$$\cos(\gamma \log\log x) \quad \text{et} \quad \sin(\gamma \log\log x)\,, \quad \gamma \in \mathbf{R}\,.$$

On trouvera dans les exercices du § 6 quelques résultats dans cette direction.

(4.11) Soit $f = \sum a_n q^n$ une forme parabolique de type (4.7 ii), de poids $k \geqslant 2$, et à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Ecartons le cas « à multiplication complexe » où il existe un caractère ϖ d'ordre 2 tel que $\varpi(p) = -1$ entraîne $a_p = 0$; cela revient à demander que les représentations l-adiques attachées à f aient pour images des sous-groupes *ouverts* de $\mathbf{GL}_2$. On devrait alors pouvoir montrer que l'ensemble des n tels que $a_n \neq 0$ *a une densité* > 0, contrairement à ce qui se passe pour $k = 1$. Il est d'ailleurs plus intéressant de se poser la question de la *nullité*, et de la *croissance*, des a_p, pour p premier. D'après Deligne on a

$$|a_p| \leqslant 2p^{(k-1)/2}\,.$$

On sait d'autre part que l'ensemble des p tels que $a_p = 0$ est de densité 0 (cf. [19], 4.4). Des arguments probabilistes simples (qui m'ont été signalés par Atkin) rendent vraisemblable [1]) la minoration

$$(4.11_k?) \qquad |a_p| >> p^{(k-3)/2-\varepsilon} \qquad (\text{si } k \geqslant 4)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, minoration qui entraînerait que a_p tend vers l'infini en valeur absolue, et ne peut donc s'annuler qu'un nombre fini de fois. Pour $k = 2, 3$, des arguments analogues suggèrent:

$$(4.11_2?) \qquad N\{p \leqslant x : a_p = 0\} \asymp x^{1/2}/\log x \qquad (\text{si } k = 2)$$

$$(4.11_3?) \qquad N\{p \leqslant x : a_p = 0\} \asymp \log\log x \qquad (\text{si } k = 3)\,.$$

---

[1]) Si l'on écrit a_p sous la forme $2p^{(k-1)/2}\cos\varphi_p$, avec $0 \leqslant \varphi_p < \pi$, (4.11$_k$?) équivaut à dire que $|\varphi_p - \pi/2| \gg 1/p^{1+\varepsilon}$, autrement dit que φ_p ne s'approche « pas trop » de $\pi/2$.

On trouvera dans Lang-Trotter [9] une étude numérique du cas $k = 2$, ainsi qu'une conjecture plus précise que (4.11_2 ?), à savoir:

(4.11_2 ??) $\qquad N\{p \leqslant x : a_p = 0\} \sim cx^{1/2}/\log x \qquad$ (si $k = 2$),

avec une valeur explicite de c.

(4.12) On peut se demander si (4.2 i) et (4.7 i) restent valables lorsque $f = \sum a_n q^n$ est une forme modulaire sur un sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ qui *n'est pas un sous-groupe de congruence* (il est alors raisonnable de supposer, non plus que les a_n sont entiers, mais que ce sont des « S-entiers »). On manque d'exemples.

(4.13) Il est probable que l'on ne peut pas étendre (4.7 i) aux formes *de poids demi-entier*, du moins en dehors des deux cas suivants

(a) $O_F/\mathfrak{m}$ est de caractéristique 2: en effet, on se ramène alors au cas d'un poids entier en multipliant f par la série

$$\theta = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots$$

qui est congrue à 1 (mod 2);

(b) la forme $f = \sum a_n q^n$ est de poids 1/2: on peut alors montrer qu'il existe des entiers $t_1, \ldots, t_r$ tels que $a_n = 0$ si n n'est pas produit de l'un des t_i par un carré; cela entraîne

$$N\{n \leqslant x : a_n \neq 0\} = O(x^{1/2}).$$

Il serait par exemple intéressant de voir ce qui se passe pour la forme modulaire $\theta^3 = \sum r_3(n) q^n$: comment se répartissent les $r_3(n)$ modulo 3, 5, etc ?

§ 5. DIVISIBILITÉ DES COEFFICIENTS DE j

5.1. Rappelons que l'invariant modulaire j est défini par $j = Q^3/\Delta$, où $Q = E_4 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n$, $\Delta = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24}$. On a

$$j = q^{-1} + 744 + 196884\, q + \ldots = \sum_{n=-1}^{\infty} c(n) q^n .$$

Les résultats du § 4 ne s'appliquent pas directement à j, car j a un pôle simple à l'infini, et n'est donc pas une « forme » modulaire. J'ignore d'ailleurs si les $c(n)$ sont presque toujours divisibles par tout entier donné; c'est peu probable. On peut toutefois obtenir des renseignements sur certains des $c(n)$ grâce au résultat suivant:

THÉORÈME 5.2. *Soit l un nombre premier. Alors :*

(a) *Les séries*

$$j' = \sum c(ln)\,q^n \quad \text{et} \quad j'' = \sum_{n \equiv 0 \pmod{l}} c(n)\,q^n$$

sont des formes modulaires l-adiques de poids 0, au sens de [21], § 1.

(b) *Si $l \neq 2$, il en est de même de la série*

$$j_- = \sum_{\left(\frac{-n}{l}\right) = -1} c(n)\,q^n .$$

(c) *Si $l = 2$, il en est de même des trois séries*

$$j_i = \sum_{n \equiv i \pmod 8} c(n)\,q^n \quad (i = 1, 3, 5) .$$

[Dans (b), la sommation porte sur les n premiers à l qui sont résidus quadratiques (mod l) si $l \equiv -1 \pmod 4$, et non résidus si $l \equiv 1 \pmod 4$. Dans les deux cas, cela exclut $n = -1$. Si $l = 2$, la même remarque s'applique aux j_i, pour $i = 1, 3, 5$.]

Si f est une forme modulaire l-adique, et r un entier > 0, il existe une forme modulaire au sens usuel, à coefficients entiers, qui est congrue à f modulo l^r. En appliquant (4.7 i) à cette forme, on obtient:

COROLLAIRE 5.3. *Pour tout l premier $\neq 2$, et tout r, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$N\left\{x \leqslant n : c(n) \not\equiv 0 \pmod{l^r} \text{ et } \left(\frac{n}{l}\right) \neq \left(\frac{-1}{l}\right)\right\} = O(x/\log^{\alpha} x) .$$

On trouvera d'autres applications de (5.2) dans les exercices du § 6.

Démonstration de (5.2).

(a) Le fait que $j' = j \mid U$ soit modulaire l-adique de poids 0 est dû à Deligne, cf. par exemple [21], p. 228. Comme $j'' = j' \mid V$, il en est de même de j'' ([21], th. 4, p. 209).

(b) Soit $n \mapsto \varepsilon(n) = \left(\frac{n}{l}\right)$ le caractère de Legendre, et notons j_ε la série déduite de j par « torsion » au moyen de ε, i.e.

$$j_\varepsilon = \sum_{n=-1}^{\infty} \varepsilon(n)\,c(n)\,q^n .$$

On a

$$2j_- = j - \left(\frac{-1}{l}\right) j_\varepsilon - j'',$$

et il suffit donc de montrer que $g = j - \left(\frac{-1}{l}\right) j_\varepsilon$ est modulaire l-adique de poids 0. Cela peut se faire de la manière suivante (pour une autre méthode, voir exerc. 6.15): tout d'abord, un argument standard, basé sur le fait que $\varepsilon^2 = 1$, montre que j_ε est une fonction modulaire de poids 0 sur le groupe $\Gamma_0(l^2)$, holomorphe en dehors des pointes. Il est donc de même de g; de plus, le développement en série de g montre que g *n'a pas de pôle à la pointe* ∞. Le fait que g soit modulaire l-adique résulte alors du théorème général suivant:

THÉORÈME 5.4. *Soit* $g = \sum a_n q^n$ *une fonction modulaire de poids* k *sur* $\Gamma_0(l^m)$, *à coefficients* $a_n \in \mathbf{Q}$. *On suppose que* g *est holomorphe dans le demi-plan* $\mathcal{I}(z) > 0$, *ainsi qu'à la pointe* ∞ (i.e. $a_n = 0$ si $n < 0$). *Alors* g *est une forme modulaire* l*-adique de poids* k *sur* $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$.

Commençons par le cas particulier où g est une *forme* modulaire de poids $k \geqslant 4$, et où les coefficients a_n sont *l-entiers*. On raisonne alors par récurrence sur m. Le cas $m = 1$ est traité dans [21], n° 3.2. Si $m \geqslant 2$, définissons des formes modulaires f_i, g_i de poids kl^i ($i \geqslant 0$) au moyen des formules de récurrence:

$$f_0 = 0\,,\quad g_0 = g\,,\quad f_i = (g_{i-1})^l \mid U\,,\quad g_i = \frac{1}{l}\,(E_{kli-1(l-1)}\, g_{i-1} - f_i)\ (i \geqslant 1).$$

(Rappelons que E_r désigne la série d'Eisenstein de poids r normalisée de telle sorte que son terme constant soit 1; on a $E_r \equiv 1 \pmod{l^{a+1}}$ si r est divisible par $l^a(l-1)$.)

On vérifie tout de suite que les coefficients des f_i et g_i sont l-entiers. De plus, les f_i sont des formes modulaires sur $\Gamma_0(l^{m-1})$, car il est bien connu que si $m \geqslant 2$, l'opérateur U fait passer de $\Gamma_0(l^m)$ à $\Gamma_0(l^{m-1})$. Vu l'hypothèse de récurrence, les f_i sont donc *des formes modulaires* l*-adiques de poids* kl^i.

Pour tout $i \geqslant 0$, posons

$$A_i = \prod_{a=i}^{\infty} E_{kl^a(l-1)}\,,$$

le produit infini ayant un sens du fait que $E_{kl^a(l-1)}$ est congru à 1 (mod l^{a+1}). La série A_i est une forme modulaire l-adique de poids

$$\sum_{a=i}^{\infty} kl^a(l-1) = (0, -kl^i) \quad \text{dans} \quad \mathbf{Z}/(l-1)\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_l\,.$$

On vérifie sans peine l'identité

$$A_0 g = A_1 f_1 + l A_2 f_2 + \ldots + l^{i-1} A_i f_i + \ldots$$

Les séries $A_i f_i$ sont modulaires l-adiques de poids

$$(0\,,\ -kl^i) + (kl^i\,,\ kl^i) = (kl^i\,,\ 0) = (k\,,\ 0)\,.$$

Il en résulte que $A_0\, g$ est modulaire l-adique de poids $(k, 0)$. Mais le fait que $A_0 \equiv 1 \pmod{l}$ entraîne que $A_0^{-1} = \lim_{s\to\infty} A_0^{l^s-1}$ est modulaire l-adique de poids $(0, k)$. Comme $g = A_0^{-1}(A_0 g)$, on voit bien que g est modulaire l-adique de poids $(k, k) = k$, ce qui démontre (5.4) dans le cas particulier considéré.

Passons au cas général. Si N est assez grand, la fonction $g' = \Delta^N g$ est holomorphe en toutes les pointes, et son poids $k' = k + 12N$ est $\geqslant 4$. C'est donc une forme modulaire, et ses coefficients a'_n ont des dénominateurs bornés (cf. [5], prop. 2.7 ou bien [25], Th. 3.52). Quitte à la multiplier par une puissance de l, on peut donc s'arranger pour que ses coefficients soient l-entiers. D'après ce que l'on vient de voir, c'est donc une forme modulaire l-adique de poids $k + 12N$ sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. De plus, ses coefficients a'_n sont nuls pour $n < N$. Le fait que $g = g'/\Delta^N$ soit modulaire l-adique résulte alors du lemme élémentaire suivant (appliqué N fois):

LEMME 5.5. *Soit* $G = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n$ *une forme modulaire l-adique de poids* K. *Si* $c_0 = 0$, *la série* $H = G/\Delta$ *est une forme modulaire l-adique de poids* $K - 12$.

Par hypothèse, G est limite de formes modulaires usuelles G_i, de poids K_i tendant vers K (au sens de [21], § 1). Les termes constants $c_{0,i}$ des G_i tendent vers 0. Choisissons, pour chaque i, un monôme M_i en les séries d'Eisenstein $Q = E_4$ et $R = E_6$ qui soit de poids K_i. On peut alors écrire G_i sous la forme

$$G_i = c_{0,i} M_i + \Delta H_i\,,$$

où H_i est une forme modulaire de poids $K_i - 12$. On a

$$\lim . \Delta H_i = G = \Delta H\,, \quad \text{d'où} \quad \lim . H_i = H\,,$$

ce qui montre bien que H est modulaire l-adique de poids $K - 12$.

(c) Si $l = 2$, notons $\varepsilon, \varphi, \psi$ les trois caractères d'ordre 2 de $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^*$, et soient $j_\varepsilon, j_\varphi, j_\psi$ les séries déduites de j par torsion au moyen de ε, φ, ψ. On a

$$4j_i = j - j'' + \varepsilon(i) j_\varepsilon + \varphi(i) j_\varphi + \psi(i) j_\psi\,.$$

Le même argument que dans (b) montre que les j_i sont des fonctions modulaires sur $\Gamma_0(2^6)$, puis, en appliquant (5.4), que ce sont des formes modulaires 2-adiques de poids 0 sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$.

Remarques.

(a) On peut aussi déduire (5.4) et (5.5) de la définition « géométrique » des formes modulaires l-adiques adoptée par Katz dans son exposé à Anvers (*Lect. Notes* 350, p. 69-190).

(b) Le théorème (5.2) « explique » que l'on ait des congruences sur $c(n) \pmod{l}$ lorsque n est, soit divisible par l, soit tel que $\left(\frac{n}{l}\right) = -\left(\frac{-1}{l}\right)$, cf. Kolberg [7], ainsi que les exercices du § 6.

(c) Lorsque $l = 2$, on a $j_1 \equiv j_3 \equiv j_5 \equiv j' \equiv j'' \equiv 0 \pmod 2$, de sorte que

$$j \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c(8n-1)\, q^{8n-1} \pmod 2,$$

et le théorème (5.2) ne fournit aucun renseignement sur ces coefficients (mod 2). Il serait intéressant de voir s'ils sont répartis « au hasard », comme cela semble le cas pour la fonction de partition, cf. [13].

§ 6. EXERCICES

Formes modulaires de poids 1.

(6.1) Les hypothèses étant celles de (4.2 ii), montrer que $\alpha \leqslant 3/4$, et qu'il y a égalité si et seulement si l'image de $\mathrm{Gal}(K_f/\mathbf{Q})$ dans $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{C}) = \mathbf{GL}_2(\mathbf{C})/\mathbf{C}^*$ est isomorphe au groupe diédral $\mathbf{D}_2$ d'ordre 4 (cf. exemple (4.4)).

(6.2) On suppose que f est de type $(1, \varepsilon)$ sur $\Gamma_0(N)$ (mais pas nécessairement que c'est une fonction propre des opérateurs de Hecke). Montrer que, si

$$(*) \qquad N\{n \leqslant x : a_n \neq 0\} \quad = \quad o(x/\log^{3/4} x),$$

on a $f = 0$. (Observer que l'espace des f satisfaisant à (*) est stable par les opérateurs de Hecke; s'il n'est pas nul, il contient un vecteur propre; conclure en appliquant (6.1).)

Formes modulaires (mod $\mathfrak{m}$).

(6.3) Montrer que, sous les hypothèses de (4.7 ii_1), on a $\alpha(\mathfrak{m}) \leqslant 3/4$ (même méthode que pour (6.1)). En déduire un résultat analogue à (6.2).

(6.4) On fixe k, $\mathfrak{m}$, N, ε et l'on note m la norme de $\mathfrak{m}$. Soit A l'ensemble des séries formelles $\sum a_n q^n$, à coefficients dans $O_F/\mathfrak{m}$, qui sont réduction (mod $\mathfrak{m}$) de formes modulaires de type (k, ε) sur $\Gamma_0(N)$, à coefficients dans O_F; c'est un $O_F/\mathfrak{m}$-module libre de type fini. Les opérateurs de Hecke T_n définissent des endomorphismes $T_{n,A}$ de A. Montrer que l'application $p \mapsto T_{p,A}$ est *frobénienne* au sens suivant: pour tout $u \in \mathrm{End}(A)$, l'ensemble P_u des nombres premiers p, ne divisant pas Nm, tels que $T_{p,A} = u$ est frobénien (et peut être défini par une extension galoisienne finie de $\mathbf{Q}$ non ramifiée en dehors de Nm). Soit P_2^+ l'ensemble des $p \equiv 1 \pmod{N\mathfrak{m}}$ qui appartiennent à P_2 (i.e. tels que $f \mid T_p = 2f$ pour tout $f \in A$), et soit P_0^- l'ensemble des $p \equiv -1 \pmod{N\mathfrak{m}}$ qui appartiennent à P_0 (i.e. tels que $f \mid T_p = 0$ pour tout $f \in A$). Montrer que P_2^+ et P_0^- ont une densité > 0 (cf. [5], 9.6, où est traité le cas analogue des formes de poids 1). Si $p \in P_2^+$, on a $T_{p^r,A} = r + 1$, et si $p \in P_0^-$, on a $T_{p^r,A} = (-1)^{r/2}$ si r est pair, et $T_{p^r,A} = 0$ si r est impair. Si $f = \sum a_n q^n$ est un élément de A, on a donc

$$(n,p) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_{np^r} = (r+1)\,a_n & \text{si} \quad p \in P_2^+ \\ a_{np^r} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \in P_0^-, \quad r \ \text{impair} \\ (-1)^{r/2} a_n & \text{si} \quad p \in P_0^-, \quad r \ \text{pair}. \end{cases} \end{cases}$$

(6.5) On conserve les notations de (6.4). Soit $f = \sum a_n q^n$ un élément de A. Montrer, en utilisant les dernières formules de (6.4), que l'ensemble des valeurs prises par les a_n $(n \geqslant 1)$ est un sous-ensemble de $O_F/\mathfrak{m}$ stable par multiplication par $\mathbf{Z}$. (En particulier, si $O_F = \mathbf{Z}$ et si l'un des a_n est inversible dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, alors les a_n prennent toutes les valeurs possibles.) Si a appartient à ce sous-ensemble, et si $2 \nmid m$, on a

$$N\{n \leqslant x : a_n = a \quad \text{dans} \quad O_F/\mathfrak{m}\} \quad >> \quad x(\log\log x)^h/\log x$$

quel que soit h. (Choisir $r \geqslant 1$ tel que $a_r = 2^{-h-1}\,a$, et remarquer que $a_n = a$ lorsque n est de la forme $p_0 \ldots p_h\, r$, où $p_0, \ldots, p_h$ sont des éléments de P_2^+ ne divisant pas r, et deux à deux distincts.)

Formes modulaires (mod 2).

(6.6) Soit S la $\mathbf{F}_2$-algèbre des formes modulaires (mod 2) sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, autrement dit (cf. [21], [27]) l'algèbre des polynômes en la série

$$\tilde{\Delta} = q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \ldots,$$

à coefficients dans $\mathbf{F}_2$. Soit S_0 (resp. S_1) le sous-espace de S engendré par les $\tilde{\Delta}^i$ pour $i \geqslant 1$ (resp. par les $\tilde{\Delta}^{2^j}$, pour $j \geqslant 0$); on a $S = \mathbf{F}_2 \oplus S_0$. Soit $f = \sum a_n q^n$ un élément de S_0.

(a) Montrer que, si $f \in S_1$ et $f \neq 0$, il existe $c > 0$ tel que

$$N\{n \leqslant x : a_n = 1\} \quad \sim \quad cx^{1/2}.$$

(b) On peut prouver (cf. [22]) que les T_p sont *localement nilpotents* sur S_0. Admettant ce fait, il existe un entier $h \geqslant 0$ tel que f soit annulé par tous les produits $T_{p_0} \ldots T_{p_h}$, p_i premier $\neq 2$. Montrer que $a_n = 1$ entraîne que n est de la forme bc^2, où b a au plus h facteurs premiers $\neq 2$ (raisonner par récurrence sur h et n). En déduire:

$$N\{n \leqslant x : a_n = 1\} \quad << \quad x(\mathrm{loglog}\, x)^{h-1}/\log x.$$

(c) On suppose $f \notin S_1$, et l'on choisit l'entier h de (b) *minimal*; on a $h \geqslant 1$. Il résulte alors de (6.4) qu'il existe des ensembles frobéniens $P_1, \ldots, P_h$ de densités > 0, ainsi qu'un élément non nul g de S_0, tels que

$$f \mid T_{P_1} \ldots T_{P_h} = g \quad \text{si} \quad p_1 \in P_1, \ldots, p_h \in P_h.$$

Si le r-ième coefficient de g est égal à 1, on a $a_n = 1$ pour tout n de la forme $p_1 \ldots p_h r$, avec $p_i \in P_i$, les p_i étant distincts, et ne divisant pas r. En conclure que

$$N\{n \leqslant x : a_n = 1\} \quad >> \quad x(\mathrm{loglog}\, x)^{h-1}/\log x,$$

d'où, en vertu de (b):

$$N\{n \leqslant x : a_n = 1\} \quad \asymp \quad x(\mathrm{loglog}x)^{h-1}/\log x.$$

(d) Il résulte de (a) et (c) que $f \in S_1$ équivaut à

$$N\{n \leqslant x : a_n = 1\} = o(x/\log x)$$

ainsi qu'à

$$N\{n \leqslant x : a_n = 1\} = O(x^{1/2}).$$

(6.7) On pose $\Delta^3 = \sum e_n q^n$, et l'on note E l'ensemble des n tels que $e_n \equiv 0 \pmod 2$. Montrer que le complémentaire E' de E est formé des entiers n de la forme $p^{4m+1} a^2$, avec p premier, a impair non divisible par p, m entier $\geqslant 0$, et $p \equiv 3 \pmod 8$. (Utiliser la congruence

$$\Delta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2} \pmod 2.)$$

La série de Dirichlet $f(s) = \sum_{n \in E'} n^{-s}$ associée à E' est égale à

$$(1-2^{-2s})\,\zeta(2s)\,\{\sum_{p \equiv 3 \pmod 8} p^{-s}/(1+p^{-2s})\}\,.$$

On peut l'écrire sous la forme

$$f(s) = c \log 1/(s-1) + h(s)\,,$$

où h est holomorphe pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$, et $c = \pi^2/32$. En déduire (grâce au théorème b de [3], p. 26), que l'on a

$$N\{n \leqslant x : e_n \equiv 1 \pmod 2\} \quad \sim \quad cx/\log x\,.$$

Montrer que

$$\Delta^3 \mid T_p \equiv \begin{cases} \Delta \pmod 2 & \text{si} \quad p \equiv 3 \pmod 8 \\ 0 \pmod 2 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Montrer que les mêmes résultats valent pour Δ^5, à condition de remplacer $p \equiv 3 \pmod 8$ par $p \equiv 5 \pmod 8$.

Divisibilité des a_n par une puissance d'un idéal premier.

(6.8) Soit $n \mapsto a_n$ une fonction multiplicative à valeurs dans l'anneau O_F des entiers d'une extension finie F de $\mathbf{Q}$, et soit v la valuation de F définie par un idéal premier $\mathfrak{p} \neq 0$ de O_F. Pour tout $r \geqslant 0$, notons N_r (resp. P_r) l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ (resp. des nombres premiers) tels que $v(a_n) = r$, et posons

$$f_r(s) = \sum_{n \in N_r} n^{-s} \quad \text{et} \quad f_T(s) = \sum_{r=0}^{\infty} T^r f_r(s)\,,$$

où T est une indéterminée.

(a) Montrer que

$$f_T(s) = \prod_p (1 + \sum_{m=1}^{\infty} T^{v(a_{p^m})} p^{-ms})\,,$$

où l'on convient de supprimer le coefficient de p^{-ms} si $v(a_{p^m}) = \infty$, i.e. si $a_{p^m} = 0$.

En déduire que

$$f_T(s) = \exp\{\sum_{r=0}^{\infty} T^r(\varphi_{P_r}(s) + \theta_r(s))\}\,,$$

où $\varphi_{P_r}(s) = \sum_{p \in P_r} p^{-s}$, et où les $\theta_r(s)$ sont holomorphes pour $\mathscr{R}(s) > 1/2$.

(b) On suppose que les P_r sont réguliers de densité $\alpha_r \geqslant 0$ et que $0 < \alpha_0 < 1$; on note m la borne inférieure des $i \geqslant 1$ tels que $\alpha_i > 0$. Montrer que $f_r(s)$ est de la forme

$$f_r(s) = \frac{1}{(s-1)^{\alpha_0}} \left\{ \sum_{j=0}^{h(r)} c_{r,j}(s) \, (\log \ 1/(s-1))^j \right\},$$

où $h(r)$ est la partie entière de r/m, et où les $c_{r,j}(s)$ sont holomorphes pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$. Cela entraîne:

$$f_0(s) + \ldots + f_r(s) = \frac{1}{(s-1)^{\alpha_0}} \left\{ \sum_{j=0}^{h(r)} d_{r,j}(s) \, (\log 1/(s-1))^j \right\},$$

où les $d_{r,j}(s)$ sont holomorphes pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$. Montrer que l'on a $d_{r,j}(1) > 0$ pour $j = h(r)$. En déduire, grâce au théorème b de [3], p. 26, que

$$N\{ n \leqslant x : a_n \not\equiv 0 \pmod{p^{r+1}} \} \sim c_r x \, (\text{loglog } x)^{h(r)} / \log^{1-\alpha_0} x,$$

avec $c_r = d_{r,j}(1) / \Gamma(\alpha_0)$.

(c) On suppose que les a_n sont les coefficients d'une forme modulaire de type (4.7 ii$_1$). Montrer que les conditions de (b) sont satisfaites (les P_r sont même frobéniens) et que l'on a

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_r + \ldots = 1 - \alpha_\infty,$$

où α_∞ est la densité des p tels que $a_p = 0$.

(d) Etendre les résultats ci-dessus au cas de produits de puissances $\mathfrak{p}_1^{r_1} \ldots \mathfrak{p}_j^{r_j}$ d'idéaux premiers (utiliser des séries formelles en $T_1, \ldots, T_j$).

(6.9) Soit l un nombre premier $\neq 2$. Soit $P_1(l)$ l'ensemble des nombres premiers $p \neq l$ tels que $\tau(p)$ soit divisible par l, mais pas par l^2. Montrer que $P_1(l)$ est de densité > 0. [Soit G_l le sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_l)$ image de la représentation l-adique attachée à Δ, cf. [19], [27]. La densité de $P_1(l)$ est égale à la mesure de l'ouvert H_l de G_l formé des éléments s tels que $v_l(\text{Tr}(s)) = 1$; il revient au même de prouver que $H_l \neq \varnothing$, que $P_1(l) \neq \varnothing$, ou que la densité de $P_1(l)$ est > 0. Or, on a $H_l \neq \varnothing$ pour $l \neq 3, 5, 7, 23, 691$, vu la « grosseur » de G_l, cf. [27]. Pour $l = 3, 7, 23$, on a $5 \in P_1(l)$ puisque $\tau(5) = 2.3.5.7.23$; pour $l = 5$, on a $19 \in P_1(l)$ puisque $\tau(19) = 2^2.5.7^2.11.23.43$; pour $l = 691$, un calcul sur machine montre, paraît-il, que $1381 \in P_1(l)$.]

Déduire de là, et de l'exercice précédent, que, pour tout $r \geqslant 0$, il existe une constante $c_{l,r} > 0$ telle que

$$N\{n \leqslant x : \tau(n) \not\equiv 0 \pmod{l^{r+1}}\} \sim c_{l,r} x (\log\log x)^r / \log^{\alpha(l)} x ,$$

où $\alpha(l)$ est donné par la formule de l'exemple 3 du § 1.

Equidistribution des valeurs des $a_n \pmod{\mathfrak{m}}$.

(6.10) Soit $n \mapsto a_n$ une fonction multiplicative à valeurs dans un anneau commutatif fini Λ. On note r l'ordre du groupe multiplicatif Λ^* des éléments inversibles de Λ. Si $\lambda \in \Lambda^*$, on note P_λ l'ensemble des nombres premiers p tels que $a_p = \lambda$. On fait les hypothèses suivantes:

(i) Les P_λ sont réguliers de densités α_λ telles que

$$0 < \sum \alpha_\lambda < 1 .$$

(ii) Le groupe Λ^* est engendré par les éléments λ tels que $\alpha_\lambda > 0$.

On note X le groupe des caractères de Λ^*; un élément φ de X est un homomorphisme de Λ^* dans $\mathbf{C}^*$; on le prolonge à Λ en posant $\varphi(\lambda) = 0$ si λ n'est pas inversible.

(a) Si $\lambda \in \Lambda^*$ et $\varphi \in X$, on pose

$$f_\lambda(s) = \sum_{a_n = \lambda} n^{-s} \quad \text{et} \quad f_\varphi(s) = \sum_n \varphi(a_n) n^{-s} .$$

Montrer que

$$f_\lambda = \frac{1}{r} \sum_{\varphi \in X} \varphi(\lambda^{-1}) f_\varphi .$$

(b) Décomposer f_φ en produit eulérien, et en déduire que

$$\log f_\varphi(s) = \beta(\varphi) \log 1/(s-1) + h_\varphi(s) ,$$

où $\beta(\varphi) = \sum_\lambda \alpha_\lambda \varphi(\lambda)$, et $h_\varphi(s)$ est holomorphe pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$.

On a $\mathscr{R}(\beta(\varphi)) \leqslant \alpha$, avec $\alpha = \sum \alpha_\lambda$, et il n'y a égalité que si φ est le caractère unité de Λ^*.

(c) Si β est un nombre complexe, on convient de noter $1/(s-1)^\beta$ la fonction $\exp\{\beta \log 1/(s-1)\}$. Montrer, en combinant (a) et (b), que l'on a

$$f_\lambda(s) = c(s)/(s-1)^\alpha + \sum_i c_{i,\lambda}(s)/(s-1)^{\beta_i} ,$$

où $c(s)$ et les $c_{i,\lambda}(s)$ sont holomorphes pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$, les β_i sont tels que $\mathscr{R}(\beta_i) < \alpha$, et $c(1) > 0$.

En déduire (cf. [3], p. 25, th. a) que

$$N\{n \leqslant x : a_n = \lambda\} \sim cx/\log^{1-\alpha} x ,$$

avec $c = c(1)/\Gamma(\alpha) > 0$. (Noter que c est indépendant de λ: il y a *équidistribution* des valeurs de (a_n) dans Λ^*.)

(d) Appliquer la méthode de Landau aux f_λ et f_φ, en supposant les P_λ frobéniens. En déduire, pour tout $N \geqslant 1$, un développement asymptotique de $N\{n \leqslant x: a_n = \lambda\}$ modulo $O(x/\log^N x)$.

(e) Enoncer et démontrer des résultats analogues pour

$$N\{n \leqslant x: a_n^{(1)} = \lambda_1, \ldots, a_n^{(r)} = \lambda_n\},$$

où les $a_n^{(i)}$ sont des fonctions multiplicatives à valeurs dans des anneaux commutatifs finis Λ_i. (Se ramener au cas d'une suite unique à valeurs dans $\Lambda = \Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_r$.)

(6.11) Soit m un entier impair $\geqslant 3$. On considère la fonction multiplicative

$$n \mapsto \tau(n) \pmod m, \quad \text{à valeurs dans } \Lambda = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

Montrer que la condition (i) de (6.10) est satisfaite, et qu'il en est de même de (ii) pourvu que m ne soit pas divisible par 7. [On peut supposer que m est une puissance d'un nombre premier l, cf. [19], 4.2. Il faut alors vérifier que, si $l \neq 2,7$, les $\tau(p)$, p premier $\neq l$, qui ne sont pas divisibles par l engendrent le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/l^2\mathbf{Z})^*$. Pour $l \neq 3, 5, 23$ et 691, cela résulte de ce que $\tau(p)$ peut prendre n'importe quelle valeur modulo l^2, cf. [27]. Pour $l = 3, 5, 23, 691$, remarquer que le sous-groupe de $(\mathbf{Z}/l^2\mathbf{Z})^*$ engendré par les $\tau(p)$, $p \neq l$, se projette *sur* $(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})^*$ et contient 2 d'après (6.4); utiliser alors le fait connu que $2^{l-1} \not\equiv 1 \pmod{l^2}$ pour $l < 1093$.]

En déduire l'équidistribution des valeurs de $\tau(n)$ appartenant à $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$, lorsque m n'est pas divisible par 7.

(6.12) Montrer qu'il existe deux constantes c_+, c_-, avec $c_+ > c_- > 0$ telles que

$$N\{n \leqslant x: \tau(n) \equiv \lambda \pmod 7\} \sim \begin{cases} c_+ x/\log^{1/2} x & \text{si } \left(\frac{\lambda}{7}\right) = 1 \\ c_- x/\log^{1/2} x & \text{si } \left(\frac{\lambda}{7}\right) = -1. \end{cases}$$

(Utiliser une méthode analogue à celle de (6.10).)

Exemple de minoration de $|a_p|$ *pour* $p \to \infty$.

(6.13) Soit $\mathfrak{a} \mapsto \chi(\mathfrak{a})$ un caractère de Hecke d'un corps imaginaire quadratique K. Soit $\mathfrak{f}$ le conducteur de χ. On suppose que χ est d'exposant entier $d \geqslant 1$, autrement dit que

$$\chi((z)) = z^d \text{ pour tout } z \in K^* \text{ tel que } z \equiv 1 \pmod{{}^\times \mathfrak{f}}.$$

Posons

$$\sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a})\, q^{N(\mathfrak{a})} = \sum a_n q^n,$$

de sorte que

$$\sum a_n n^{-s} = L(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}} \left(1 - \chi(\mathfrak{p})\, N(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}.$$

On sait que la série $\sum a_n\, q^n$ est une forme modulaire parabolique de poids $k = 1 + d$ et que c'est une fonction propre des opérateurs de Hecke. Si ω est le caractère d'ordre 2 qui correspond à K, on a $a_n = 0$ si $\omega(n) = -1$.

Soit P l'ensemble des nombres premiers p ne divisant pas $N(\mathfrak{f})$, et tels que $\omega(p) = 1$. Si $p \in P$, on a

$$a_p = \chi(\mathfrak{p}) + \chi(\overline{\mathfrak{p}}),$$

où $\mathfrak{p}$ et $\overline{\mathfrak{p}}$ sont les idéaux premiers de O_K divisant p. Montrer que

$$|a_p| >> p^{(k-3)/2-\varepsilon} \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

[On peut se restreindre au cas où $\mathfrak{p}$ est contenu dans la classe mod $N(\mathfrak{f})$ d'un idéal fixe $\mathfrak{a}$. Si l'on écrit alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}(z)$, avec $z \equiv 1 \pmod{{}^\times N(\mathfrak{f})}$, on a $a_p = \chi(\mathfrak{a})\, z^d + \chi(\overline{\mathfrak{a}})\overline{z}^d = A_d(x, y)$, où x, y sont les coordonnées de z par rapport à une $\mathbf{Z}$-base de $\mathfrak{a}^{-1}$, et où A_d est un polynôme homogène de degré d. Les coefficients de A_d sont des nombres algébriques, et A_d n'a aucun facteur multiple. D'après le théorème de Roth, on a

$$A_d(x, y) >> (\sup(|x|, |y|))^{d-2-\varepsilon} \text{ pour } x, y \text{ premiers entre eux,}$$

d'où aussitôt le résultat cherché.]

Soit δ un nombre > 0 tel que, pour tout secteur angulaire de C de largeur $\sim 1/N$, il existe $p << N^\delta$ tel que l'élément z correspondant appartienne au secteur angulaire donné. (D'après Kovalčik, *Dokl.*, t. 219, 1974, on peut prendre pour δ tout nombre > 4.) Montrer qu'il existe alors une constante $c > 0$ telle que

$$|a_p| \leqslant c p^{(k-1)/2-1/\delta}$$

pour une infinité de p tels que $\omega(p) = 1$.

Passage des fonctions modulaires aux formes modulaires.

(6.14) Soit $f = \sum_{n \geqq -r} a_n\, q^n$ une fonction modulaire sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ de poids $k \in \mathbf{Z}$, à coefficients rationnels. On suppose f holomorphe dans le demi-plan $\mathscr{I}(z) > 0$ mais pas nécessairement à la pointe ∞.

(a) Soit l un nombre premier tel que $a_n = 0$ pour tout $n < 0$ divisible par l. Montrer que les séries

$$f' = \sum a_{ln} q^n \quad \text{et} \quad f'' = \sum_{l \mid n} a_n q^n$$

sont des formes modulaires l-adiques de poids k, au sens de [21].

(b) Soient l un nombre premier $\neq 2$, et $\varepsilon = \pm 1$ tels que $a_n = 0$ pour tout $n < 0$ tel que $\left(\frac{n}{l}\right) = \varepsilon$. Montrer que la série

$$f_- = \sum_{\left(\frac{n}{l}\right) = \varepsilon} a_n q^n$$

est une forme modulaire l-adique de poids k. (Même méthode que pour 5.2.)

Divisibilité des coefficients $c(n)$ de j.

(6.15) Soit D l'opérateur de dérivation $\sum a_n q^n \mapsto \sum n a_n q^n$, noté θ dans [21], [27]. Soient l un nombre premier $\neq 2$, et r un entier $\geqslant 1$.

(a) Montrer que, si h est une forme modulaire (mod l^r), de poids k, il existe une forme modulaire h' (mod l^r), de poids $k + 2 + l^{r-1}(l-1)$, telle que

$$D(h/\Delta) \equiv h'/\Delta \pmod{l^r}.$$

(Utiliser le lemme 3 de [27], p. 19, ainsi que le fait que

$$P \equiv E_{2+l^{r-1}(l-1)} \pmod{l^r}.)$$

(b) Déduire de là que, pour tout $a \geqslant 0$, il existe une forme modulaire f_a (mod l^r), de poids $12 + a\left(2 + l^{r-1}(l-1)\right)$, telle que

$$D^a(j) \equiv f_a/\Delta \pmod{l^r}.$$

(c) On prend $a = \frac{1}{2} l^{r-1}(l-1)$. Montrer que

$$D^a(j) \equiv j_\varepsilon \pmod{l^r}, \quad \text{où} \quad j_\varepsilon = \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{n}{l}\right) c(n) q^n.$$

En déduire, grâce à (b), l'existence d'une forme modulaire h de poids

$$12 + l^{r-1}(l-1) + \frac{1}{2} l^{2r-2}(l-1)^2 = 12 + k,$$

telle que

$$j - \left(\frac{-1}{l}\right) j_\varepsilon \equiv h/\Delta \pmod{l^r}.$$

Le terme constant de h est nul. En déduire que $h = f\Delta$, où f est une forme modulaire (mod l^r) de poids k, ce qui fournit une autre démonstration de (5.2 b).

(6.16) On conserve les notations de (6.15), et l'on prend $r = 1$, i.e. on calcule (mod l).

(a) Montrer que $j' \equiv 744 \pmod{l}$ si $l = 3, 5, 7, 11$, et que $j' \pmod{l}$ est de filtration $l - 1$ (au sens de [27], p. 24) si $l \geqslant 13$. En particulier, on a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
&c(3n) \equiv 0 \pmod 3\\
&c(5n) \equiv 0 \pmod 5\\
&c(7n) \equiv 0 \pmod 7\\
&c(11n) \equiv 0 \pmod{11}\\
&c(13n) \equiv c(13)\,\tau(n) \equiv -\tau(n) \pmod{13}\\
&c(17n) \equiv c(17)\,t_{16}(n) \equiv 4t_{16}(n) \pmod{17}\\
&c(19n) \equiv c(19)\,t_{18}(n) \equiv 7t_{18}(n) \pmod{19}\\
&c(23n) \equiv c(23)\,t_{22}(n) \equiv 4t_{22}(n) \pmod{23},
\end{aligned}$$

où, pour $k = 16, 18, 22$, on note $t_k(n)$ le coefficient de q^n dans l'unique forme parabolique normalisée de poids k.

(b) On a

$$D(j) = Q^2R/\Delta = Q^2R\Delta^{l-1}/\Delta^l,$$

d'où

$$D^{a+1}(j) \equiv D^a(Q^2R\Delta^{l-1})/\Delta^l \pmod{l}.$$

Montrer que, si $l \geqslant 13$, $Q^2\,R\,\Delta^{l-1}$ est de filtration $12l + 2$. En déduire que $D^a(Q^2R\Delta^{l-1})$ est de filtration $12l + 2 + a(l+1)$ pour $a \leqslant l - 2$.

(c) On applique (b) avec $a = (l-3)/2$, de telle sorte que

$$D^a(Q^2R\Delta^{l-1})/\Delta^l = D^{a+1}(j) \equiv j_\varepsilon, \quad \text{cf. (6.15 c)}.$$

En déduire que la forme modulaire (mod l) $j - \left(\frac{-1}{l}\right) j_\varepsilon$ est de filtration $\frac{1}{2}(l-1)^2$, et que j_- est de filtration $l^2 - l$. En particulier, ces formes sont $\not\equiv 0 \pmod{l}$.

(d) Si $l = 3$ (resp. 5, 7, 11), la forme $j - \left(\frac{-1}{l}\right) j_\varepsilon$ est nulle (resp. de filtration 0, 12, 40).

(e) Déduire de (b) et (c) les congruences suivantes (dues à Kolberg [7]):

$$c(n) \equiv 0 \pmod 5 \quad \text{si} \quad \left(\frac{n}{5}\right) = -1$$

$$c(n) \equiv 2n\,\sigma_3(n) \pmod 7 \quad \text{si} \quad \left(\frac{n}{7}\right) = 1$$

$$c(n) \equiv 9n^2\,\sigma_5(n) - 3n^3\,\sigma_3(n) \pmod{11} \quad \text{si} \quad \left(\frac{n}{11}\right) = 1$$

$$c(n) \equiv 8\,\tau(n) - 3n^3\,\sigma_5(n) - 2n^4\,\sigma_3(n) \pmod{13} \quad \text{si} \quad \left(\frac{n}{13}\right) = -1\,.$$

(6.17) Soient l un nombre premier $\geqslant 7$, et r un entier > 0. Montrer que, pour tout entier a, il existe une infinité d'entiers n tels que $c(n) \equiv a \pmod{l^r}$ et $\left(\frac{n}{l}\right) = -\left(\frac{-1}{l}\right)$. (Utiliser les exercices (6.16) et (6.5).)

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN, E. Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren. *Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 8* (1930), pp. 292-306 [*Collected Papers*, pp. 165-179].

[2] DELANGE, H. Généralisation du théorème de Ikehara. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, 71* (1954), pp. 213-242 [Math. Rev., t. 16, 921e].

[3] —— Sur la distribution des entiers ayant certaines propriétés. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, 73* (1956), pp. 15-74 [Math. Rev., t. 18, 720a].

[4] DELIGNE, P. Formes modulaires et représentations l-adiques. *Séminaire Bourbaki*, 1968/69, exposé 355, pp. 139-172. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 179).

[5] —— et SERRE, J.-P. Formes modulaires de poids 1. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 4, 7* (1974), pp. 507-530.

[6] HARDY, G. H. *Ramanujan.* Cambridge, Cambridge University Press, 1940; New York, Chelsea publishing Company, 1959 [Math. Rev., t. 3, 71d].

[7] KOLBERG O. Congruences for the coefficients of the modular invariant $j(\tau)$. *Math. Scand. 10* (1962), pp. 173-181 [Math. Rev., t. 26, 1287].

[8] LANDAU, E. Über die Einteilung der positiven ganzen Zahlen in vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihrer additiven Zusammensetzung erforderlichen Quadrate. *Arch. der Math. und Phys., (3) 13* (1908), pp. 305-312.

[9] LANG, S. and TROTTER, H. Frobenius Distributions in $\mathbf{GL}_2$-Extensions. Lecture Notes in Mathematics 504, Berlin, Springer-Verlag, 1976.

[10] NARKIEWICZ, W. *Elementary and analytic theory of algebraic numbers.* Warszawa, PWN-Polish scientific Publishers, 1974 (Polska Akademia Nauk. Monografie Matematyczne, 57).

[11] ODONI, R. W. K. The Farey density of norm subgroups of global fields (I). *Mathematika*, London, *20* (1973), pp. 155-169.

[12] —— On the norms of algebraic integers. *Mathematika*, London, *22* (1975), pp. 71-80.

[13] PARKIN, T. R. and SHANKS, D. On the distribution of parity in the partition function. *Math. Comp. 21* (1967), pp. 466-480 [Math. Rev., t. 37, 2711].

[14] RAIKOV, D. A. Généralisation du théorème d'Ikehara-Landau [en russe]. *Mat. Sbornik 45* (1938), pp. 559-568.

[15] —— Sur la distribution des entiers dont les facteurs premiers appartiennent à une progression arithmétique donnée [en russe]. *Mat. Sbornik 46* (1938), pp. 563-570.

[16] RANKIN, R. A. The divisibility of divisor functions. *Proc. Glasgow math. Assoc. 5* (1961), pp. 35-40 [Math. Rev., t. 26, 2407].

[17] SCOURFIELD, E. J. On the divisibility of $\sigma_\nu(n)$. *Acta Arithm. 10* (1964), pp. 245-285 [Math. Rev., t. 30, 3074].

[18] —— Non-divisibility of some multiplicative functions. *Acta Arithm. 22* (1973), pp. 287-314 [Math. Rev., t. 47, 4954].

[19] SERRE, J.-P. Une interprétation des congruences relatives à la fonction τ de Ramanujan. *Séminaire Delange-Pisot-Poitou: Théorie des nombres*, 9e année, 1967/68, exposé 14: 17 p.

[20] —— *Abelian l-adic representations and elliptic curves.* New York, Benjamin, 1968.

[21] —— Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques. *Modular functions of one variable, III*, pp. 191-268. Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

[22] —— Valeurs propres des opérateurs de Hecke *modulo l. Astérisque 24-25* (1975), pp. 109-117.

[23] —— Divisibilité des coefficients des formes modulaires, *C. R. Acad. Sc. Paris 279* (1974), Série A, pp. 679-682.

[24] SHANKS, D. The second-order term in the asymptotic expansion of B(x). *Math. Comp. 18* (1964), pp. 75-86 [Math. Rev., t. 28, 2391].

[25] SHIMURA, G. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions.* Publ. Math. Soc. Japan, 11, Princeton Univ. Press, 1971.

[26] STANLEY, G. K. Two assertions made by Ramanujan, *J. London math. Soc. 3* (1928), pp. 232-237 (Corr. *ibid., 4* (1929), p. 32).

[27] SWINNERTON-DYER, H. P. F. On *l*-adic representations and congruences for coefficients of modular forms. *Modular functions of one variable, III*, pp. 1-55. Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

[28] WATSON, G. N. Über Ramanujansche Kongruenzeigenschaften der Zerfällungsanzahlen (I). *Math. Z. 39* (1935), pp. 712-731.

[29] WINTNER, A. On the prime number theorem. *Amer. J. Math. 64* (1942), pp. 320-326 [Math. Rev., t. 3, 271a].

Jean-Pierre Serre

Collège de France
Paris.

(Reçu le 21 mai 1976)