

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 22 (1976)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** DIVISIBILITÉ DE CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES  
**Kapitel:** §1. ENSEMBLES DE NOMBRES PREMIERS  
**Autor:** Serre, Jean-Pierre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48187>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## § 1. ENSEMBLES DE NOMBRES PREMIERS

Soit  $P$  un ensemble de nombres premiers. Considérons les propriétés suivantes :

$$(1.1) \quad \sum_{p \in P} 1/p = +\infty ;$$

(1.2)  $P$  est de *densité*  $\alpha > 0$ , i.e. le nombre des  $p \in P$  qui sont  $\leq x$  est égal à  $\alpha x / \log x + o(x / \log x)$  quand  $x \rightarrow \infty$ .

(1.3)  $P$  est *régulier* de densité  $\alpha > 0$ , au sens de Delange [3], i.e.

$$\sum_{p \in P} p^{-s} = \alpha \log 1/(s-1) + \theta_P(s),$$

où  $\theta_P(s)$  se prolonge en une fonction holomorphe pour  $\Re(s) \geq 1$ .

(1.4)  $P$  est *frobénien* de densité  $\alpha > 0$ , i. e. il existe une extension finie galoisienne  $K/\mathbf{Q}$ , et une partie  $H$  du groupe  $G = \text{Gal}(K/\mathbf{Q})$  telles que

(a)  $H$  est stable par conjugaison,

(b)  $|H| / |G| = \alpha$  (on note  $|X|$  le nombre d'éléments d'un ensemble fini  $X$ ),

(c) pour tout  $p$  assez grand, on a  $p \in P \Leftrightarrow \sigma_p(K/\mathbf{Q}) \in H$ , où  $\sigma_p(K/\mathbf{Q})$  désigne la substitution de Frobenius [1] de  $p$  dans  $G$  (définie à conjugaison près lorsque  $p$  ne divise pas le discriminant de  $K$ ).

PROPOSITION 1.5. On a  $(1.4) \Rightarrow (1.3) \Rightarrow (1.2) \Rightarrow (1.1)$ .

L'implication  $(1.2) \Rightarrow (1.1)$  est facile. L'implication  $(1.3) \Rightarrow (1.2)$  est prouvée dans [3], p. 57, comme conséquence d'un théorème taubérien. D'autre part, sous les hypothèses de (1.4), on a

$$(1.6) \quad \sum_{p \in P} p^{-s} = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi} \bar{\chi}(H) \log L(s, \chi)^1 + g(s),$$

où :

$\chi$  parcourt l'ensemble des caractères irréductibles de  $G$ ,

$L(s, \chi)$  est la fonction  $L$  d'Artin [1] relative à l'extension  $K/\mathbf{Q}$  et au caractère  $\chi$ ,

<sup>1)</sup> Ici, comme au §2, la détermination choisie de « log » est celle que l'on obtient par prolongement analytique sur les horizontales à partir de la détermination « évidente » pour  $\Re(s) > 1$  (i. e. celle fournie par le développement en série — on peut aussi la caractériser par le fait qu'elle tend vers 0 quand  $\Re(s)$  tend vers  $+\infty$ ).

$g$  est une série de Dirichlet qui converge absolument pour  $\Re(s) > 1/2$  (donc est holomorphe pour  $\Re(s) \geq 1$ ),

$$\bar{\chi}(H) = \sum_{h \in H} \bar{\chi}(h).$$

Il résulte alors des propriétés élémentaires des fonctions  $L(s, \chi)$  que  $\log L(s, \chi) = \delta_\chi \log 1/(s-1) + \theta_\chi(s)$ , où  $\delta_\chi = 0$  (resp.  $\delta_\chi = 1$ ) si  $\chi \neq 1$  (resp. si  $\chi = 1$ ), et  $\theta_\chi(s)$  est holomorphe pour  $\Re(s) \geq 1$ . La propriété (1.3) en résulte.

*Exemples.*

(1) Si  $a$  et  $m$  sont des entiers  $\geq 1$  tels que  $(a, m) = 1$ , l'ensemble des nombres premiers  $p$  tels que  $p \equiv a \pmod{m}$  est frobenien de densité  $1/\varphi(m)$ .

(2) L'ensemble des nombres premiers qui se décomposent complètement (resp. ont un facteur premier de degré 1) dans une extension finie de  $\mathbf{Q}$  est frobenien de densité  $> 0$ .

(3) Soit  $\tau$  la fonction de Ramanujan (cf. [6], [19], [27]). Si  $m$  est un entier  $\geq 1$ , l'ensemble des  $p$  tels que  $\tau(p) \equiv 0 \pmod{m}$  est frobenien de densité  $\alpha(m) > 0$ ; cela résulte de Deligne [4] (voir aussi [19], [27], ainsi que le §4 ci-après). Lorsque  $m$  est premier, on peut calculer  $\alpha(m)$  grâce à [27]. On trouve:

$$\alpha(m) = \begin{cases} 1, 1/2, 1/4, 1/2, 1/2, 1/690 & \text{si } m = 2, 3, 5, 7, 23, 691 \\ m/(m^2 - 1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Remarque.* Lorsque  $P$  est frobenien, on peut préciser un peu le comportement de la fonction  $f_P(s) = \sum_{p \in P} p^{-s}$  à gauche de la droite critique  $\Re(s) = 1$ :

PROPOSITION 1.7. *La fonction  $f_P$  se prolonge en une fonction holomorphe dans une région de la forme*

$$(1.8) \quad \begin{cases} \Re(s) \geq 1 - b/\log^A T, & \text{avec } b, A > 0, T = 2 + |\mathcal{F}(s)| \\ \mathcal{F}(s) \neq 0 \text{ ou } s \text{ réel } > 1, \end{cases}$$

et y admet une majoration

$$(1.9) \quad |f_P(s)| = O(\log \log T) \text{ pour } T \rightarrow \infty.$$

Cela se démontre de la manière suivante: vu (1.6), il suffit de prouver l'énoncé analogue pour  $\log L(s, \chi)$ ; grâce au théorème d'induction de Brauer, on peut en outre supposer que  $\chi$  est un caractère de degré 1 de

Gal ( $K/E$ ), où  $E$  est un sous-corps de  $K$ . On peut alors appliquer à  $\log L(s, \chi)$  les méthodes classiques de Hadamard et de La Vallée Poussin, cf. par exemple [10], p. 336-337. [En fait, [10] se borne à prouver l'existence d'une région (1.8) où  $L = L(s, \chi)$  est holomorphe  $\neq 0$ , et où  $|L'/L| = O(\log^A T)$ . Pour passer de là à la majoration

$$|\log L(s, \chi)| = O(\log \log T),$$

on distingue deux cas, suivant que  $\mathcal{R}(s)$  est ou non  $\geq 1 + 1/\log^A T$ . Dans le premier cas, on a :

$$\begin{aligned} |\log L(s, \chi)| &\leq [E:Q] \log \zeta(\mathcal{R}(s)) \leq [E:Q] A \log \log T + O(1) \\ &= O(\log \log T). \end{aligned}$$

Le deuxième cas se ramène au premier: on applique le théorème des accroissements finis au segment horizontal  $I_s$  joignant  $s$  au point  $s_0$  tel que

$$\mathcal{I}(s_0) = \mathcal{I}(s), \quad \mathcal{R}(s_0) = 1 + 1/\log^A T,$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned} |\log L(s, \chi)| &\leq |\log L(s_0, \chi)| + |s - s_0| \sup_{\sigma \in I_s} |L'/L(\sigma, \chi)| \\ &= O(\log \log T) + O(1) = O(\log \log T). \end{aligned}$$

## §2. THÉORÈMES DE DENSITÉ

2.1. *Définitions.* Soit  $E$  une partie de l'ensemble  $\mathbf{N}^*$  des entiers  $> 0$ ; on note  $E'$  le complémentaire  $\mathbf{N}^* - E$  de  $E$ . Si  $x \in \mathbf{N}^*$ , on note  $E(x)$  le nombre des  $n \leq x$  qui appartiennent à  $E$ ; on a  $E(x) + E'(x) = x$ . Lorsque  $E$  est l'ensemble des  $n$  satisfaisant à une relation  $R$ , on écrit aussi

$$N\{n \leq x: R(n)\}$$

à la place de  $E(x)$ .

On dit que  $E$  est de *densité*  $c$  si  $\lim_{x \rightarrow \infty} E(x)/x = c$ , autrement dit si

$$E(x) = cx + o(x) \quad \text{pour } x \rightarrow \infty.$$

Soit  $P$  un ensemble de nombres premiers. Nous dirons que  $P$  est *associé* à  $E$  si, pour tout  $p \in P$  et tout entier  $m \geq 1$  non divisible par  $p$ , on a  $pm \in E$ .

**THÉORÈME 2.2.** *Si  $P$  est associé à  $E$ , et si  $P$  jouit de la propriété (1.1), à savoir  $\sum_{p \in P} 1/p = +\infty$ , alors  $E$  est de densité 1.*