

§5. DIVISIBILITÉ DES COEFFICIENTS DE j

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On trouvera dans Lang-Trotter [9] une étude numérique du cas $k = 2$, ainsi qu'une conjecture plus précise que (4.11₂ ?), à savoir :

$$(4.11_2 \text{ ??}) \quad N \{ p \leq x : a_p = 0 \} \sim cx^{1/2}/\log x \quad (\text{si } k = 2),$$

avec une valeur explicite de c .

(4.12) On peut se demander si (4.2 i) et (4.7 i) restent valables lorsque $f = \sum a_n q^n$ est une forme modulaire sur un sous-groupe d'indice fini de $SL_2(\mathbb{Z})$ qui n'est pas un sous-groupe de congruence (il est alors raisonnable de supposer, non plus que les a_n sont entiers, mais que ce sont des « S -entiers »). On manque d'exemples.

(4.13) Il est probable que l'on ne peut pas étendre (4.7 i) aux formes de poids demi-entier, du moins en dehors des deux cas suivants

(a) O_F/m est de caractéristique 2: en effet, on se ramène alors au cas d'un poids entier en multipliant f par la série

$$\theta = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots$$

qui est congrue à 1 (mod 2);

(b) la forme $f = \sum a_n q^n$ est de poids 1/2: on peut alors montrer qu'il existe des entiers t_1, \dots, t_r tels que $a_n = 0$ si n n'est pas produit de l'un des t_i par un carré; cela entraîne

$$N \{ n \leq x : a_n \neq 0 \} = O(x^{1/2}).$$

Il serait par exemple intéressant de voir ce qui se passe pour la forme modulaire $\theta^3 = \sum r_3(n) q^n$: comment se répartissent les $r_3(n)$ modulo 3, 5, etc ?

§ 5. DIVISIBILITÉ DES COEFFICIENTS DE j

5.1. Rappelons que l'invariant modulaire j est défini par $j = Q^3/\Delta$, où $Q = E_4 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n$, $\Delta = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$. On a

$$j = q^{-1} + 744 + 196884q + \dots = \sum_{n=-1}^{\infty} c(n) q^n.$$

Les résultats du § 4 ne s'appliquent pas directement à j , car j a un pôle simple à l'infini, et n'est donc pas une « forme » modulaire. J'ignore d'ailleurs si les $c(n)$ sont presque toujours divisibles par tout entier donné; c'est peu probable. On peut toutefois obtenir des renseignements sur certains des $c(n)$ grâce au résultat suivant:

THÉORÈME 5.2. Soit l un nombre premier. Alors :

(a) Les séries

$$j' = \sum c(ln) q^n \quad \text{et} \quad j'' = \sum_{n \equiv 0 \pmod{l}} c(n) q^n$$

sont des formes modulaires l -adiques de poids 0, au sens de [21], § 1.

(b) Si $l \neq 2$, il en est de même de la série

$$j_- = \sum_{\left(\frac{-n}{l}\right) = -1} c(n) q^n.$$

(c) Si $l = 2$, il en est de même des trois séries

$$j_i = \sum_{n \equiv i \pmod{8}} c(n) q^n \quad (i = 1, 3, 5).$$

[Dans (b), la sommation porte sur les n premiers à l qui sont résidus quadratiques $(\text{mod } l)$ si $l \equiv -1 \pmod{4}$, et non résidus si $l \equiv 1 \pmod{4}$. Dans les deux cas, cela exclut $n = -1$. Si $l = 2$, la même remarque s'applique aux j_i , pour $i = 1, 3, 5$.]

Si f est une forme modulaire l -adique, et r un entier > 0 , il existe une forme modulaire au sens usuel, à coefficients entiers, qui est congrue à f modulo l^r . En appliquant (4.7 i) à cette forme, on obtient :

COROLLAIRE 5.3. Pour tout l premier $\neq 2$, et tout r , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$N \left\{ x \leq n : c(n) \not\equiv 0 \pmod{l^r} \text{ et } \left(\frac{n}{l}\right) \neq \left(\frac{-1}{l}\right) \right\} = O(x/\log^\alpha x).$$

On trouvera d'autres applications de (5.2) dans les exercices du § 6.

Démonstration de (5.2).

(a) Le fait que $j' = j | U$ soit modulaire l -adique de poids 0 est dû à Deligne, cf. par exemple [21], p. 228. Comme $j'' = j' | V$, il en est de même de j'' ([21], th. 4, p. 209).

(b) Soit $n \mapsto \varepsilon(n) = \left(\frac{n}{l}\right)$ le caractère de Legendre, et notons j_ε la série déduite de j par « torsion » au moyen de ε , i.e.

$$j_\varepsilon = \sum_{n=-1}^{\infty} \varepsilon(n) c(n) q^n.$$

On a

$$2j_- = j - \left(\frac{-1}{l}\right) j_\varepsilon - j'' ,$$

et il suffit donc de montrer que $g = j - \left(\frac{-1}{l}\right) j_\varepsilon$ est modulaire l -adique de poids 0. Cela peut se faire de la manière suivante (pour une autre méthode, voir exerc. 6.15): tout d'abord, un argument standard, basé sur le fait que $\varepsilon^2 = 1$, montre que j_ε est une fonction modulaire de poids 0 sur le groupe $\Gamma_0(l^2)$, holomorphe en dehors des pointes. Il est donc de même de g ; de plus, le développement en série de g montre que g n'a pas de pôle à la pointe ∞ . Le fait que g soit modulaire l -adique résulte alors du théorème général suivant:

THÉORÈME 5.4. Soit $g = \sum a_n q^n$ une fonction modulaire de poids k sur $\Gamma_0(l^m)$, à coefficients $a_n \in \mathbf{Q}$. On suppose que g est holomorphe dans le demi-plan $\mathcal{I}(z) > 0$, ainsi qu'à la pointe ∞ (i.e. $a_n = 0$ si $n < 0$). Alors g est une forme modulaire l -adique de poids k sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$.

Commençons par le cas particulier où g est une forme modulaire de poids $k \geq 4$, et où les coefficients a_n sont l -entiers. On raisonne alors par récurrence sur m . Le cas $m = 1$ est traité dans [21], n° 3.2. Si $m \geq 2$, définissons des formes modulaires f_i, g_i de poids kl^i ($i \geq 0$) au moyen des formules de récurrence:

$$f_0 = 0, \quad g_0 = g, \quad f_i = (g_{i-1})^l | U, \quad g_i = \frac{1}{l} (E_{kli-1(l-1)} g_{i-1} - f_i) \quad (i \geq 1).$$

(Rappelons que E_r désigne la série d'Eisenstein de poids r normalisée de telle sorte que son terme constant soit 1; on a $E_r \equiv 1 \pmod{l^{a+1}}$ si r est divisible par $l^a(l-1)$.)

On vérifie tout de suite que les coefficients des f_i et g_i sont l -entiers. De plus, les f_i sont des formes modulaires sur $\Gamma_0(l^{m-1})$, car il est bien connu que si $m \geq 2$, l'opérateur U fait passer de $\Gamma_0(l^m)$ à $\Gamma_0(l^{m-1})$. Vu l'hypothèse de récurrence, les f_i sont donc des formes modulaires l -adiques de poids kl^i .

Pour tout $i \geq 0$, posons

$$A_i = \prod_{a=i}^{\infty} E_{kla(l-1)},$$

le produit infini ayant un sens du fait que $E_{kla(l-1)}$ est congru à 1 $\pmod{l^{a+1}}$. La série A_i est une forme modulaire l -adique de poids

$$\sum_{a=i}^{\infty} kl^a(l-1) = (0, -kl^i) \quad \text{dans} \quad \mathbf{Z}/(l-1)\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_l.$$

On vérifie sans peine l'identité

$$A_0 g = A_1 f_1 + l A_2 f_2 + \dots + l^{i-1} A_i f_i + \dots$$

Les séries $A_i f_i$ sont modulaires l -adiques de poids

$$(0, -kl^i) + (kl^i, kl^i) = (kl^i, 0) = (k, 0).$$

Il en résulte que $A_0 g$ est modulaire l -adique de poids $(k, 0)$. Mais le fait que $A_0 \equiv 1 \pmod{l}$ entraîne que $A_0^{-1} = \lim_{s \rightarrow \infty} A_0^{l^s - 1}$ est modulaire l -adique de poids $(0, k)$. Comme $g = A_0^{-1} (A_0 g)$, on voit bien que g est modulaire l -adique de poids $(k, k) = k$, ce qui démontre (5.4) dans le cas particulier considéré.

Passons au cas général. Si N est assez grand, la fonction $g' = \Delta^N g$ est holomorphe en toutes les pointes, et son poids $k' = k + 12N$ est ≥ 4 . C'est donc une forme modulaire, et ses coefficients a'_n ont des dénominateurs bornés (cf. [5], prop. 2.7 ou bien [25], Th. 3.52). Quitte à la multiplier par une puissance de l , on peut donc s'arranger pour que ses coefficients soient l -entiers. D'après ce que l'on vient de voir, c'est donc une forme modulaire l -adique de poids $k + 12N$ sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. De plus, ses coefficients a'_n sont nuls pour $n < N$. Le fait que $g = g' / \Delta^N$ soit modulaire l -adique résulte alors du lemme élémentaire suivant (appliqué N fois):

LEMME 5.5. Soit $G = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n$ une forme modulaire l -adique de poids K . Si $c_0 = 0$, la série $H = G/\Delta$ est une forme modulaire l -adique de poids $K - 12$.

Par hypothèse, G est limite de formes modulaires usuelles G_i , de poids K_i tendant vers K (au sens de [21], § 1). Les termes constants $c_{0,i}$ des G_i tendent vers 0. Choisissons, pour chaque i , un monôme M_i en les séries d'Eisenstein $Q = E_4$ et $R = E_6$ qui soit de poids K_i . On peut alors écrire G_i sous la forme

$$G_i = c_{0,i} M_i + \Delta H_i,$$

où H_i est une forme modulaire de poids $K_i - 12$. On a

$$\lim . \Delta H_i = G = \Delta H, \quad \text{d'où} \quad \lim . H_i = H,$$

ce qui montre bien que H est modulaire l -adique de poids $K - 12$.

(c) Si $l = 2$, notons $\varepsilon, \varphi, \psi$ les trois caractères d'ordre 2 de $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^*$, et soient $j_\varepsilon, j_\varphi, j_\psi$ les séries déduites de j par torsion au moyen de $\varepsilon, \varphi, \psi$. On a

$$4j_i = j - j'' + \varepsilon(i)j_\varepsilon + \varphi(i)j_\varphi + \psi(i)j_\psi.$$

Le même argument que dans (b) montre que les j_i sont des fonctions modulaires sur $\Gamma_0(2^6)$, puis, en appliquant (5.4), que ce sont des formes modulaires 2-adiques de poids 0 sur $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

Remarques.

(a) On peut aussi déduire (5.4) et (5.5) de la définition « géométrique » des formes modulaires l -adiques adoptée par Katz dans son exposé à Anvers (*Lect. Notes* 350, p. 69-190).

(b) Le théorème (5.2) « explique » que l'on ait des congruences sur $c(n) \pmod{l}$ lorsque n est, soit divisible par l , soit tel que $\binom{n}{l} = -\binom{-1}{l}$, cf. Kolberg [7], ainsi que les exercices du § 6.

(c) Lorsque $l = 2$, on a $j_1 \equiv j_3 \equiv j_5 \equiv j' \equiv j'' \equiv 0 \pmod{2}$, de sorte que

$$j \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c(8n-1) q^{8n-1} \pmod{2},$$

et le théorème (5.2) ne fournit aucun renseignement sur ces coefficients $\pmod{2}$. Il serait intéressant de voir s'ils sont répartis « au hasard », comme cela semble le cas pour la fonction de partition, cf. [13].

§ 6. EXERCICES

Formes modulaires de poids 1.

(6.1) Les hypothèses étant celles de (4.2 ii), montrer que $\alpha \leq 3/4$, et qu'il y a égalité si et seulement si l'image de $\mathrm{Gal}(K_f/\mathbf{Q})$ dans $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{C}) = \mathbf{GL}_2(\mathbf{C})/\mathbf{C}^*$ est isomorphe au groupe diédral \mathbf{D}_2 d'ordre 4 (cf. exemple (4.4)).

(6.2) On suppose que f est de type $(1, \varepsilon)$ sur $\Gamma_0(N)$ (mais pas nécessairement que c'est une fonction propre des opérateurs de Hecke). Montrer que, si

$$(*) \quad N \{ n \leq x : a_n \neq 0 \} = o(x/\log^{3/4}x),$$

on a $f = 0$. (Observer que l'espace des f satisfaisant à (*) est stable par les opérateurs de Hecke; s'il n'est pas nul, il contient un vecteur propre; conclure en appliquant (6.1).)