§2. Puissances extérieures

Le noyau de res : $R(FG) \to \prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC)$ est donc contenu dans $pR(FG)$. Comme maintenant $\prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC)$ est sans torsion, on a

$$\operatorname{Ker}(\text{res}) = \cap_n p^n R(FG) = 0 .$$

Au § 5 nous aurons besoin de $K(FG)$ dont la définition sera alors rappelée, et du fait que si F est de caractéristique non-nulle, alors la flèche d'extension des scalaires $K(FG) \to K(EG)$ est une injection directe. La démonstration est donnée dans [Serre], page 136, où $K(FG)$ est noté $P_F(G)$. Nous ne la reproduisons pas.

§ 2. Puissances extérieures

Les puissances extérieures des FG-modules fournissent un élément de structure additionnel dans l'anneau $R(FG)$, appelé λ-structure qui nous permettra au paragraphe suivant de définir pour tout entier n un endomorphisme d'anneau

$$\Psi_n : R(FG) \to R(FG)$$

jouissant de propriétés analogues à celles des opérations d'Adams en topologie.

Soit V un FG-module, toujours de dimension finie. On notera $\lambda_m V$ la m-ième puissance extérieure de V. C'est le quotient de la puissance tensorielle $V^m = V \otimes V \otimes \ldots \otimes V$ (m facteurs) par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $v_1 \otimes \ldots \otimes v_m$ avec $v_i = v_j$ pour au moins nu couple d'indices distincts (i, j).

L'action de G sur $\lambda_m V$ est induite de l'action de G sur V^m. On convient que $\lambda_0 V = F$ avec action triviale, et $\lambda_1 V = V$.

Il s'avère que les puissances extérieures λ_m, $m \geqq 0$, induisent des opérations

$$\lambda_m : R(FG) \to R(FG)$$

sur l'anneau des représentations virtuelles, et on a la formule habituelle

$$\lambda_m(\alpha+\beta) = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i \alpha) \cdot (\lambda_{m-i} \beta) .$$

Le point essentiel est le

Lemme. *Soit* $0 \to V_0 \to V_1 \to V \to 0$ *une suite exacte de* FG*-modules. Alors,*

$$[\lambda_m V_1] = \sum_{i=0}^{m} [\lambda_i V_0] \cdot [\lambda_{m-i} V]$$

dans $R(FG)$ *pour* $m = 0, 1, \ldots$.

Ici $[U]$ désigne la classe de U dans $R(FG)$.

On va démontrer que $\lambda_m V_1$ possède une filtration

$$\lambda_m V_1 = W_0 \supset W_1 \supset \dots \supset W_m = \lambda_m V_0 \supset W_{m+1} = 0$$

par des sous-modules W_i tels que

$$W_i / W_{i+1} \cong \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V$$

pour $i = 0, 1, \dots, m$.

Par définition du produit dans $R(FG)$, on a

$$[\lambda_i V_0] \cdot [\lambda_{m-i} V] = [\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V] .$$

D'autre part, dans $R(FG)$, on a

$$[\lambda_m V_1] = \sum_{i=0}^{m} [W_i / W_{i+1}] ,$$

et le lemme en résulte.

Soit $f : V_1^m \to \lambda_m V_1$ l'application canonique. On considère le sous-module $V_0^i \otimes V_1^{m-i}$ de V_1^m. Son image par f est un sous-module W_i de $\lambda_m V_1$. Il est clair que les W_i, $i = 0, 1, \dots, m+1$ sont des sous-modules emboités de $\lambda_m V_1$.

Reste à démontrer l'isomorphisme $W_i / W_{i+1} \cong \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V$ de FG-modules pour $i = 0, 1, \dots, m$.

On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V_0^i \otimes V_1^{m-i} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & W_i \arrow[d, "q"] \\
V_0^i \otimes V^{m-i} \arrow[r, "f'"] \arrow[dr] & W_i / W_{i+1} \\
& \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V \arrow[u, "f''"']
\end{tikzcd}$$

où p est induit par la projection $V_1 \to V$.

Tout d'abord f induit bien une application f'. En effet, on vérifie immédiatement que $f(\operatorname{Ker} p) \subset W_{i+1}$ et il en résulte que f' est bien définie. Il est clair que f' est FG-linéaire. Il est également évident que f' se factorise par une application FG-linéaire $f'' : \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V \to W_i / W_{i+1}$. La surjectivité de f (sur W_i) implique la surjectivité de f''.

Par ailleurs, on constate que

$$\dim_F \lambda_m V_1 = \sum_{i=0}^{m} \dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V)$$

car

$$\dim \lambda_i U = \binom{\dim U}{i}, \text{ et } \binom{n+N}{m} = \sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} \binom{N}{m-i}$$

comme il résulte de la comparaison des coefficients de t dans les deux membres de l'identité $(1+t)^{n+N} = (1+t)^n (1+t)^N$.

Puisque $\dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V) \geqq \dim_F W_i / W_{i+1}$ en vertu de l'existence de f'', surjectif, on a donc

$$\dim_F \lambda_m V_1 = \textstyle\sum_{i=0}^{m} \dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V)$$
$$\geqq \textstyle\sum_{i=0}^{m} \dim W_i / W_{i+1} = \dim_F \lambda_m V_1 ,$$

ce qui implique que toutes les « inégalités »

$$\dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i}) \geqq \dim_F W_i / W_{i+1}$$

sont en fait des égalités.

Il en résulte que f'' est un isomorphisme pour tout i et le lemme est démontré.

Pour vérifier maintenant que λ_m induit une application

$$\lambda_m : R(F\,G) \to R(F\,G)$$

telle que

$$\lambda_m(\alpha + \beta) = \textstyle\sum_{i=0}^{m} (\lambda_i \alpha) \,.\, (\lambda_{m-i} \beta) ,$$

il est commode d'introduire l'anneau des séries formelles $R(FG)\,[[t]]$.

Pout toute F-représentation V de G, posons

$$\lambda(V) = \textstyle\sum_{m=0}^{\infty} [\lambda_m(V)] \,.\, t^m \in R(F\,G)\,[[t]] \,.$$

Une série formelle de terme constant 1 est inversible. ($\lambda_0 V = 1$.) Comme les représentations forment une base de L, la formule ci-dessus définit un homomorphisme

$$\lambda : L \to U\big(R(F\,G)\,[[t]]\big)$$

du groupe (additif) L dans le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $R(FG)\,[[t]]$.

Si $0 \to V_0 \to V_1 \to V \to 0$ est une suite exacte de FG-modules, le lemme exprime que $\lambda(V_1) = \lambda(V_0) \,.\, \lambda(V)$. Donc, λ passe au quotient et fournit un homomorphisme

$$\lambda : R(F\,G) \to U\big(R(F\,G)\,[[t]]\big)$$

du groupe additif de $R(FG)$ dans le groupe multiplicatif $U\big(R(FG)\,[[t]]\big)$ et dont les coefficients sont les applications

$$\lambda_m : R(F\,G) \to R(F\,G)$$

cherchées, i.e. $\lambda_m(\alpha)$ est le coefficient de t^m dans la série formelle $\lambda(\alpha)$.

Il est évident que la formule

$$\lambda_m(\alpha+\beta) = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i\alpha) \, . \, (\lambda_{m-i}\,\beta)$$

ne fait que traduire l'identité

$$\lambda(\alpha+\beta) = (\lambda\alpha) \, . \, (\lambda\beta) \, .$$

Remarque. λ_m commute à l'involution $*$: $R(FG) \to R(FG)$ définie au § 1. Enfin, λ_m commute aux homomorphismes de restriction f^* : $R(FG')$ $\to R(FG)$ pour $f : G \to G'$, ainsi qu'aux homomorphismes d'extensions de scalaires.

§ 3. Définition des opérations d'Adams.

Soient $t_1, ..., t_N$ des indéterminées. Pour tout entier n tel que $1 \leqq n \leqq N$, on considère le polynôme symétrique $t_1{}^n + t_2{}^n + ... + t_N{}^n$ et son expression unique $Q_n^N(s_1, ..., s_n)$ comme polynôme en les fonctions symétriques élémentaires $s_1, ..., s_n$ de degré $\leqq n$ des indéterminées $t_1, ..., t_N$. Les fonctions $s_1, ..., s_k, ...$ sont définies par l'identité

$$X^N - s_1 X^{N-1} + ... + (-1)^i s_i X^{N-i} + ... + (-1)^N s_N = \prod_{\nu=1}^{N} (X - t_\nu)$$

avec les conventions $s_k = 0$ pour $k > N$ et $s_0 = 1$. On observe, en faisant $t_{N'+1} = t_{N'+2} = ... = t_N = 0$ (où $N' \leqq N$), que

$$s_i(t_1, ..., t_{N'}, 0, ..., 0) = s_i(t_1, ..., t_{N'})$$

pour $i \leqq N'$.

Exemples.

$$Q_1(s_1) = s_1, \; Q_2(s_1, s_2) = s_1{}^2 - 2s_2 \, ,$$
$$Q_3(s_1, s_2, s_3) = s_1{}^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3 \, ,$$
$$Q_4(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1{}^4 - 4s_1{}^2 s_2 + 2s_2{}^2 + 4s_1 s_3 - 4s_4 \, ,$$

où l'on a écrit Q_i au lieu de Q_i^N pour simplifier l'écriture.

En fait, le polynôme $Q_n^N(s_1, ..., s_n)$ en tant que polynôme en $s_1, ..., s_n$ est indépendant de N pourvu que $N \geqq n$. Cela résulte d'une identité dont nous aurons encore besoin plus bas, exprimée par le lemme qui suit.

Soient $t_1', ..., t_N'$ et $t_1'', ..., t_{N''}''$ deux suites d'intéderminées et $t_1, ..., t_N$ leur juxtaposition, i.e. $N = N' + N''$ et $t_i = t_i'$ pour $1 \leqq i \leqq N'$, $t_{N'+j}$ $= t_j''$ pour $1 \leqq j \leqq N''$. Soient $s_1', ..., s_{N'}'$ et $s_1'', ..., s_{N''}''$ les fonctions symétriques élémentaires des $t_1', ..., t_{N'}'$ et $t_1'', ..., t_{N''}''$ respectivement. Enfin, soient $s_1, ..., s_N$ les fonctions symétriques élémentaires des $t_1, ..., t_N$.