Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1976)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: OPÉRATIONS D'ADAMS EN THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

Autor: Kervaire, Michel

Kapitel: §2. Puissances extérieures

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48172

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le noyau de res : $R(FG) \to \prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC)$ est donc contenu dans $pR(FG)$. Comme maintenant $\prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC)$ est sans torsion, on a

$$\text{Ker (res)} = \cap_n p^n R(F\,G) = 0\,.$$

Au § 5 nous aurons besoin de $K(FG)$ dont la définition sera alors rappelée, et du fait que si F est de caractéristique non-nulle, alors la flèche d'extension des scalaires $K(FG) \to K(EG)$ est une injection directe. La démonstration est donnée dans [Serre], page 136, où $K(FG)$ est noté $P_F(G)$. Nous ne la reproduisons pas.

§ 2. Puissances extérieures

Les puissances extérieures des FG-modules fournissent un élément de structure additionnel dans l'anneau $R(FG)$, appelé λ-structure qui nous permettra au paragraphe suivant de définir pour tout entier n un endomorphisme d'anneau

$$\Psi_n : R(F\,G) \to R(F\,G)$$

jouissant de propriétés analogues à celles des opérations d'Adams en topologie.

Soit V un FG-module, toujours de dimension finie. On notera $\lambda_m V$ la m-ième puissance extérieure de V. C'est le quotient de la puissance tensorielle $V^m = V \otimes V \otimes \ldots \otimes V$ (m facteurs) par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $v_1 \otimes \ldots \otimes v_m$ avec $v_i = v_j$ pour au moins nu couple d'indices distincts (i, j).

L'action de G sur $\lambda_m V$ est induite de l'action de G sur V^m. On convient que $\lambda_0 V = F$ avec action triviale, et $\lambda_1 V = V$.

Il s'avère que les puissances extérieures λ_m, $m \geqq 0$, induisent des opérations

$$\lambda_m : R(F\,G) \to R(F\,G)$$

sur l'anneau des représentations virtuelles, et on a la formule habituelle

$$\lambda_m(\alpha + \beta) = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i \alpha) \,.\, (\lambda_{m-i} \beta)\,.$$

Le point essentiel est le

Lemme. *Soit* $0 \to V_0 \to V_1 \to V \to 0$ *une suite exacte de* FG*-modules. Alors,*

$$[\lambda_m V_1] = \sum_{i=0}^{m} [\lambda_i V_0] \,.\, [\lambda_{m-i} V]$$

dans $R(FG)$ *pour* $m = 0, 1, \ldots$.

Ici $[U]$ désigne la classe de U dans $R(FG)$.

On va démontrer que $\lambda_m V_1$ possède une filtration

$$\lambda_m V_1 = W_0 \supset W_1 \supset \ldots \supset W_m = \lambda_m V_0 \supset W_{m+1} = 0$$

par des sous-modules W_i tels que

$$W_i / W_{i+1} \cong \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V$$

pour $i = 0, 1, \ldots, m$.

Par définition du produit dans $R(FG)$, on a

$$[\lambda_i V_0] \cdot [\lambda_{m-i} V] = [\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V] .$$

D'autre part, dans $R(FG)$, on a

$$[\lambda_m V_1] = \sum_{i=0}^{m} [W_i / W_{i+1}] ,$$

et le lemme en résulte.

Soit $f : V_1^m \to \lambda_m V_1$ l'application canonique. On considère le sous-module $V_0^i \otimes V_1^{m-i}$ de V_1^m. Son image par f est un sous-module W_i de $\lambda_m V_1$. Il est clair que les W_i, $i = 0, 1, \ldots, m + 1$ sont des sous-modules emboités de $\lambda_m V_1$.

Reste à démontrer l'isomorphisme $W_i / W_{i+1} \cong \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V$ de FG-modules pour $i = 0, 1, \ldots, m$.

On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V_0^i \otimes V_1^{m-i} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & W_i \arrow[d, "q"] \\
V_0^i \otimes V^{m-i} \arrow[r, "f'"] \arrow[dr] & W_i / W_{i+1} \\
& \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V \arrow[u, "f''"']
\end{tikzcd}$$

où p est induit par la projection $V_1 \to V$.

Tout d'abord f induit bien une application f'. En effet, on vérifie immédiatement que $f(\operatorname{Ker} p) \subset W_{i+1}$ et il en résulte que f' est bien définie. Il est clair que f' est FG-linéaire. Il est également évident que f' se factorise par une application FG-linéaire $f'' : \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V \to W_i / W_{i+1}$. La surjectivité de f (sur W_i) implique la surjectivité de f''.

Par ailleurs, on constate que

$$\dim_F \lambda_m V_1 = \sum_{i=0}^{m} \dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V)$$

car

$$\dim \lambda_i U = \binom{\dim U}{i}, \text{ et } \binom{n+N}{m} = \sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} \binom{N}{m-i}$$

comme il résulte de la comparaison des coefficients de t dans les deux membres de l'identité $(1+t)^{n+N} = (1+t)^n (1+t)^N$.

Puisque $\dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V) \geqq \dim_F W_i/W_{i+1}$ en vertu de l'existence de f'', surjectif, on a donc

$$\dim_F \lambda_m V_1 = \sum_{i=0}^{m} \dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V)$$
$$\geqq \sum_{i=0}^{m} \dim W_i/W_{i+1} = \dim_F \lambda_m V_1 ,$$

ce qui implique que toutes les « inégalités »

$$\dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i}) \geqq \dim_F W_i/W_{i+1}$$

sont en fait des égalités.

Il en résulte que f'' est un isomorphisme pour tout i et le lemme est démontré.

Pour vérifier maintenant que λ_m induit une application

$$\lambda_m : R(F\,G) \to R(F\,G)$$

telle que

$$\lambda_m(\alpha+\beta) = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i \alpha) . (\lambda_{m-i}\beta) ,$$

il est commode d'introduire l'anneau des séries formelles $R(FG)[[t]]$.

Pout toute F-représentation V de G, posons

$$\lambda(V) = \sum_{m=0}^{\infty} [\lambda_m(V)] . t^m \in R(F\,G)[[t]] .$$

Une série formelle de terme constant 1 est inversible. ($\lambda_0 V = 1$.) Comme les représentations forment une base de L, la formule ci-dessus définit un homomorphisme

$$\lambda : L \to U(R(F\,G)[[t]])$$

du groupe (additif) L dans le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $R(FG)[[t]]$.

Si $0 \to V_0 \to V_1 \to V \to 0$ est une suite exacte de FG-modules, le lemme exprime que $\lambda(V_1) = \lambda(V_0) . \lambda(V)$. Donc, λ passe au quotient et fournit un homomorphisme

$$\lambda : R(F\,G) \to U(R(F\,G)[[t]])$$

du groupe additif de $R(FG)$ dans le groupe multiplicatif $U(R(FG)[[t]])$ et dont les coefficients sont les applications

$$\lambda_m : R(F\,G) \to R(F\,G)$$

cherchées, i.e. $\lambda_m(\alpha)$ est le coefficient de t^m dans la série formelle $\lambda(\alpha)$.

Il est évident que la formule

$$\lambda_m(\alpha+\beta) = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i\alpha) \,.\, (\lambda_{m-i}\,\beta)$$

ne fait que traduire l'identité

$$\lambda(\alpha+\beta) = (\lambda\alpha) \,.\, (\lambda\beta) \,.$$

Remarque. λ_m commute à l'involution $* : R(FG) \to R(FG)$ définie au § 1. Enfin, λ_m commute aux homomorphismes de restriction $f^* : R(FG') \to R(FG)$ pour $f : G \to G'$, ainsi qu'aux homomorphismes d'extensions de scalaires.

§ 3. Définition des opérations d'Adams.

Soient $t_1, \ldots, t_N$ des indéterminées. Pour tout entier n tel que $1 \leqq n \leqq N$, on considère le polynôme symétrique $t_1{}^n + t_2{}^n + \ldots + t_N{}^n$ et son expression unique $Q_n^N(s_1, \ldots, s_n)$ comme polynôme en les fonctions symétriques élémentaires $s_1, \ldots, s_n$ de degré $\leqq n$ des indéterminées $t_1, \ldots, t_N$. Les fonctions $s_1, \ldots, s_k, \ldots$ sont définies par l'identité

$$X^N - s_1 X^{N-1} + \ldots + (-1)^i s_i X^{N-i} + \ldots + (-1)^N s_N = \prod_{\nu=1}^{N} (X - t_\nu)$$

avec les conventions $s_k = 0$ pour $k > N$ et $s_0 = 1$. On observe, en faisant $t_{N'+1} = t_{N'+2} = \ldots = t_N = 0$ (où $N' \leqq N$), que

$$s_i(t_1, \ldots, t_{N'}, 0, \ldots, 0) = s_i(t_1, \ldots, t_{N'})$$

pour $i \leqq N'$.

Exemples.

$$Q_1(s_1) = s_1,\ Q_2(s_1, s_2) = s_1{}^2 - 2s_2\,,$$
$$Q_3(s_1, s_2, s_3) = s_1{}^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3\,,$$
$$Q_4(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1{}^4 - 4s_1{}^2 s_2 + 2s_2{}^2 + 4s_1 s_3 - 4s_4\,,$$

où l'on a écrit Q_i au lieu de Q_i^N pour simplifier l'écriture.

En fait, le polynôme $Q_n^N(s_1, \ldots, s_n)$ en tant que polynôme en $s_1, \ldots, s_n$ est indépendant de N pourvu que $N \geqq n$. Cela résulte d'une identité dont nous aurons encore besoin plus bas, exprimée par le lemme qui suit.

Soient $t_1', \ldots, t_N'$ et $t_1'', \ldots, t_{N''}''$ deux suites d'intéderminées et $t_1, \ldots, t_N$ leur juxtaposition, i.e. $N = N' + N''$ et $t_i = t_i'$ pour $1 \leqq i \leqq N'$, $t_{N'+j} = t_j''$ pour $1 \leqq j \leqq N''$. Soient $s_1', \ldots, s_{N'}'$ et $s_1'', \ldots, s_{N''}''$ les fonctions symétriques élémentaires des $t_1', \ldots, t_{N'}'$ et $t_1'', \ldots, t_{N''}''$ respectivement. Enfin, soient $s_1, \ldots, s_N$ les fonctions symétriques élémentaires des $t_1, \ldots, t_N$.