

§2. Puissances extérieures

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le noyau de $\text{res} : R(FG) \rightarrow \prod_{C \in \mathcal{G}} R(FC)$ est donc contenu dans $pR(FG)$. Comme maintenant $\prod_{C \in \mathcal{G}} R(FC)$ est sans torsion, on a

$$\text{Ker}(\text{res}) = \bigcap_n p^n R(FG) = 0.$$

Au § 5 nous aurons besoin de $K(FG)$ dont la définition sera alors rappelée, et du fait que si F est de caractéristique non-nulle, alors la flèche d'extension des scalaires $K(FG) \rightarrow K(EG)$ est une injection directe. La démonstration est donnée dans [Serre], page 136, où $K(FG)$ est noté $P_F(G)$. Nous ne la reproduisons pas.

§ 2. PUISSANCES EXTÉRIEURES

Les puissances extérieures des FG -modules fournissent un élément de structure additionnel dans l'anneau $R(FG)$, appelé λ -structure qui nous permettra au paragraphe suivant de définir pour tout entier n un endomorphisme d'anneau

$$\Psi_n : R(FG) \rightarrow R(FG)$$

jouissant de propriétés analogues à celles des opérations d'Adams en topologie.

Soit V un FG -module, toujours de dimension finie. On notera $\lambda_m V$ la m -ième puissance extérieure de V . C'est le quotient de la puissance tensorielle $V^m = V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ (m facteurs) par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $v_1 \otimes \dots \otimes v_m$ avec $v_i = v_j$ pour au moins un couple d'indices distincts (i, j) .

L'action de G sur $\lambda_m V$ est induite de l'action de G sur V^m . On convient que $\lambda_0 V = F$ avec action triviale, et $\lambda_1 V = V$.

Il s'avère que les puissances extérieures $\lambda_m, m \geq 0$, induisent des opérations

$$\lambda_m : R(FG) \rightarrow R(FG)$$

sur l'anneau des représentations virtuelles, et on a la formule habituelle

$$\lambda_m(\alpha + \beta) = \sum_{i=0}^m (\lambda_i \alpha) \cdot (\lambda_{m-i} \beta).$$

Le point essentiel est le

LEMME. Soit $0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow V \rightarrow 0$ une suite exacte de FG -modules. Alors,

$$[\lambda_m V_1] = \sum_{i=0}^m [\lambda_i V_0] \cdot [\lambda_{m-i} V]$$

dans $R(FG)$ pour $m = 0, 1, \dots$.

Ici $[U]$ désigne la classe de U dans $R(FG)$.

On va démontrer que $\lambda_m V_1$ possède une filtration

$$\lambda_m V_1 = W_0 \supset W_1 \supset \dots \supset W_m = \lambda_m V_0 \supset W_{m+1} = 0$$

par des sous-modules W_i tels que

$$W_i/W_{i+1} \cong \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V$$

pour $i = 0, 1, \dots, m$.

Par définition du produit dans $R(FG)$, on a

$$[\lambda_i V_0] \cdot [\lambda_{m-i} V] = [\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V].$$

D'autre part, dans $R(FG)$, on a

$$[\lambda_m V_1] = \sum_{i=0}^m [W_i/W_{i+1}],$$

et le lemme en résulte.

Soit $f: V_1^m \rightarrow \lambda_m V_1$ l'application canonique. On considère le sous-module $V_0^i \otimes V_1^{m-i}$ de V_1^m . Son image par f est un sous-module W_i de $\lambda_m V_1$. Il est clair que les W_i , $i = 0, 1, \dots, m+1$ sont des sous-modules emboîtés de $\lambda_m V_1$.

Reste à démontrer l'isomorphisme $W_i/W_{i+1} \cong \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V$ de FG -modules pour $i = 0, 1, \dots, m$.

On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V_0^i \otimes V_1^{m-i} & \xrightarrow{f} & W_i \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ V_0^i \otimes V_1^{m-i} & \xrightarrow{f'} & W_i/W_{i+1} \\ & \searrow & \nearrow f'' \\ & \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V & \end{array}$$

où p est induit par la projection $V_1 \rightarrow V$.

Tout d'abord f induit bien une application f' . En effet, on vérifie immédiatement que $f(\text{Ker } p) \subset W_{i+1}$ et il en résulte que f' est bien définie. Il est clair que f' est FG -linéaire. Il est également évident que f' se factorise par une application FG -linéaire $f'' : \lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V \rightarrow W_i/W_{i+1}$. La surjectivité de f (sur W_i) implique la surjectivité de f'' .

Par ailleurs, on constate que

$$\dim_F \lambda_m V_1 = \sum_{i=0}^m \dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V)$$

car

$$\dim \lambda_i U = \binom{\dim U}{i}, \text{ et } \binom{n+N}{m} = \sum_{i=0}^m \binom{n}{i} \binom{N}{m-i}$$

comme il résulte de la comparaison des coefficients de t dans les deux membres de l'identité $(1+t)^{n+N} = (1+t)^n (1+t)^N$.

Puisque $\dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V) \geq \dim_F W_i / W_{i+1}$ en vertu de l'existence de f'' , surjectif, on a donc

$$\begin{aligned} \dim_F \lambda_m V_1 &= \sum_{i=0}^m \dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V) \\ &\geq \sum_{i=0}^m \dim W_i / W_{i+1} = \dim_F \lambda_m V_1, \end{aligned}$$

ce qui implique que toutes les « inégalités »

$$\dim_F (\lambda_i V_0 \otimes \lambda_{m-i} V) \geq \dim_F W_i / W_{i+1}$$

sont en fait des égalités.

Il en résulte que f'' est un isomorphisme pour tout i et le lemme est démontré.

Pour vérifier maintenant que λ_m induit une application

$$\lambda_m : R(FG) \rightarrow R(FG)$$

telle que

$$\lambda_m(\alpha + \beta) = \sum_{i=0}^m (\lambda_i \alpha) \cdot (\lambda_{m-i} \beta),$$

il est commode d'introduire l'anneau des séries formelles $R(FG) [[t]]$.

Pour toute F -représentation V de G , posons

$$\lambda(V) = \sum_{m=0}^{\infty} [\lambda_m(V)] \cdot t^m \in R(FG) [[t]].$$

Une série formelle de terme constant 1 est inversible. ($\lambda_0 V = 1$.) Comme les représentations forment une base de L , la formule ci-dessus définit un homomorphisme

$$\lambda : L \rightarrow U(R(FG) [[t]])$$

du groupe (additif) L dans le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $R(FG) [[t]]$.

Si $0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow V \rightarrow 0$ est une suite exacte de FG -modules, le lemme exprime que $\lambda(V_1) = \lambda(V_0) \cdot \lambda(V)$. Donc, λ passe au quotient et fournit un homomorphisme

$$\lambda : R(FG) \rightarrow U(R(FG) [[t]])$$

du groupe additif de $R(FG)$ dans le groupe multiplicatif $U(R(FG) [[t]])$ et dont les coefficients sont les applications

$$\lambda_m : R(FG) \rightarrow R(FG)$$

cherchées, i.e. $\lambda_m(\alpha)$ est le coefficient de t^m dans la série formelle $\lambda(\alpha)$.

Il est évident que la formule

$$\lambda_m(\alpha + \beta) = \sum_{i=0}^m (\lambda_i \alpha) \cdot (\lambda_{m-i} \beta)$$

ne fait que traduire l'identité

$$\lambda(\alpha + \beta) = (\lambda\alpha) \cdot (\lambda\beta).$$

Remarque. λ_m commute à l'involution $*$: $R(FG) \rightarrow R(FG)$ définie au § 1. Enfin, λ_m commute aux homomorphismes de restriction $f^* : R(FG') \rightarrow R(FG)$ pour $f : G \rightarrow G'$, ainsi qu'aux homomorphismes d'extensions de scalaires.

§ 3. DÉFINITION DES OPÉRATIONS D'ADAMS.

Soient t_1, \dots, t_N des indéterminées. Pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq N$, on considère le polynôme symétrique $t_1^n + t_2^n + \dots + t_N^n$ et son expression unique $Q_n^N(s_1, \dots, s_n)$ comme polynôme en les fonctions symétriques élémentaires s_1, \dots, s_n de degré $\leq n$ des indéterminées t_1, \dots, t_N . Les fonctions s_1, \dots, s_k, \dots sont définies par l'identité

$$X^N - s_1 X^{N-1} + \dots + (-1)^i s_i X^{N-i} + \dots + (-1)^N s_N = \prod_{v=1}^N (X - t_v)$$

avec les conventions $s_k = 0$ pour $k > N$ et $s_0 = 1$. On observe, en faisant $t_{N'+1} = t_{N'+2} = \dots = t_N = 0$ (où $N' \leq N$), que

$$s_i(t_1, \dots, t_{N'}, 0, \dots, 0) = s_i(t_1, \dots, t_{N'})$$

pour $i \leq N'$.

Exemples.

$$Q_1(s_1) = s_1, \quad Q_2(s_1, s_2) = s_1^2 - 2s_2,$$

$$Q_3(s_1, s_2, s_3) = s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3,$$

$$Q_4(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1^4 - 4s_1^2 s_2 + 2s_2^2 + 4s_1 s_3 - 4s_4,$$

où l'on a écrit Q_i au lieu de Q_i^N pour simplifier l'écriture.

En fait, le polynôme $Q_n^N(s_1, \dots, s_n)$ en tant que polynôme en s_1, \dots, s_n est indépendant de N pourvu que $N \geq n$. Cela résulte d'une identité dont nous aurons encore besoin plus bas, exprimée par le lemme qui suit.

Soient $t'_1, \dots, t'_{N'}$ et $t''_1, \dots, t''_{N''}$ deux suites d'indéterminées et t_1, \dots, t_N leur juxtaposition, i.e. $N = N' + N''$ et $t_i = t'_i$ pour $1 \leq i \leq N'$, $t_{N'+j} = t''_j$ pour $1 \leq j \leq N''$. Soient $s'_1, \dots, s'_{N'}$ et $s''_1, \dots, s''_{N''}$ les fonctions symétriques élémentaires des $t'_1, \dots, t'_{N'}$ et $t''_1, \dots, t''_{N''}$ respectivement. Enfin, soient s_1, \dots, s_N les fonctions symétriques élémentaires des t_1, \dots, t_N .