

## 4. SUMS OVER INTERVALS OF LENGTH $k/3$ .

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

4. SUMS OVER INTERVALS OF LENGTH  $k/3$ .

THEOREM 4.1. If  $\chi$  is even and  $\chi_{3k}(n) = \left(\frac{n}{3}\right) \chi(n)$ , then

$$(4.1) \quad S_{31} = \frac{3^{1/2} G(\chi)}{2\pi} L(1, \bar{\chi}_{3k});$$

if  $\chi$  is odd, then

$$(4.2) \quad S_{31} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} \{3 - \bar{\chi}(3)\} L(1, \bar{\chi}).$$

*Proof.* First, suppose that  $\chi$  is even. Let

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 2\pi/3, \\ 1/2, & x = 2\pi/3, \\ 0, & 2\pi/3 < x \leq \pi, \end{cases}$$

be an even function with period  $2\pi$ . Then, by an elementary calculation,

$$(4.3) \quad f(x) = \frac{2}{3} + \frac{3^{1/2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3}\right) \frac{\cos(nx)}{n} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Now, multiply both sides of (2.1) by  $3^{1/2} \left(\frac{n}{3}\right) / (\pi n)$  and sum on  $n$ ,  $1 \leq n < \infty$ .

With the use of (4.3), we obtain

$$\begin{aligned} 2S_{31} &= \sum_{j=1}^{k-1} \chi(j) \{f(2\pi j/k) - 2/3\} \\ &= \frac{3^{1/2}}{\pi} G(\chi) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\chi}(n) \left(\frac{n}{3}\right) \frac{1}{n} = \frac{3^{1/2}}{\pi} G(\chi) L(1, \bar{\chi}_{3k}), \end{aligned}$$

which completes the proof of (4.1).

For variety, we shall prove (4.2) by contour integration. Of course, the method of Fourier series used above works equally well here.

Let

$$f(z) = \frac{\pi F(z, \chi)}{z \sin \pi(z + 1/3)},$$

where

$$\begin{aligned} F(z, \chi) &= 2i \sum_{0 < j < k/3} \chi(j) \sin(\pi z + \pi/3 - 6\pi jz/k) \\ &\quad + e^{-3\pi iz} \sum_{k/3 < j < 2k/3} \chi(j) e^{6\pi ijz/k}. \end{aligned}$$

Observe that

$$(4.4) \quad R(f, 0) = \frac{\pi F(0, \chi)}{\sin(\pi/3)} = 2\pi i S_{31}$$

and that

$$(4.5) \quad \begin{aligned} R(f, n-1/3) &= \frac{3(-1)^n}{3n-1} F(n-1/3, \chi) \\ &= -\frac{3}{3n-1} G(3n-1, \chi) = -\frac{3}{3n-1} \bar{\chi}(3n-1) G(\chi), \end{aligned}$$

by (2.1), where  $-\infty < n < \infty$ .

We integrate  $f$  over the same rectangle  $C_N$  as in the proof of Theorem 3.2. The estimate (3.8) is obtained by the same type of argument as in that proof. Applying the residue theorem, employing (4.4) and (4.5), and letting  $N$  tend to  $\infty$ , we deduce that

$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi i S_{31} - 3G(\chi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(3n-1)}{3n-1} \\ &= 2\pi i S_{31} - 3G(\chi) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(3n-1)}{3n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(3n+1)}{3n+1} \right\} \\ &= 2\pi i S_{31} - 3G(\chi) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(n)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(3n)}{3n} \right\}, \end{aligned}$$

from which (4.2) readily follows.

**COROLLARY 4.2.** For any real primitive character  $\chi$  with  $k > 3$ ,  $S_{31} > 0$ .

**COROLLARY 4.3.** If  $d > 0$  and  $3 \nmid d$ , then

$$(4.6) \quad S_{31}(\chi_d) = \frac{1}{2} h(-3d);$$

if  $d < 0$ , then

$$(4.7) \quad S_{31}(\chi_{-d}) = \frac{1}{2} \left\{ 3 - \left(\frac{d}{3}\right) \right\} h(d).$$

**COROLLARY 4.4.** Let  $p > 3$ . If  $p \equiv 1 \pmod{12}$ , then  $h(-3p) \equiv 0 \pmod{4}$ , while if  $p \equiv 5 \pmod{12}$ , then  $h(-3p) \equiv 2 \pmod{4}$ . If  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , then  $h(-12p) \equiv 0 \pmod{4}$ . For any odd prime  $p$ ,  $h(-24p) \equiv 0 \pmod{4}$ .

*Proof.* Let  $p = 6m + j$ , where  $j = 1$  or  $5$  and  $m$  is a non-negative integer. The number of summands in  $S_{31}(\chi_p)$  is thus  $2m + [j/3]$ . The two congru-

ences for  $h(-3p)$  are then consequences of (4.6). The number of summands in  $S_{31}(\chi_{4p})$  is  $8m + [4j/3]$ . If  $p \equiv 7 \pmod{12}$ , the number of non-zero summands is  $4m$ ; if  $p \equiv 11 \pmod{12}$ , the number of non-zero summands is  $4m + 2$ . In either case, the number of non-zero summands is even, and so it follows from (4.6) that  $h(-12p) \equiv 0 \pmod{4}$  when  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Lastly, the number of summands in  $S_{31}(\chi_{8p})$  is  $16m + [8j/3]$ . If  $j = 1$ , there are  $8m$  non-zero summands; if  $j = 5$ , there are  $8m + 6$  non-zero summands. In either case,  $S_{31}(\chi_{8p})$  is even, and we deduce from (4.6) that  $h(-24p) \equiv 0 \pmod{4}$ .

**COROLLARY 4.5.** Let  $p$  and  $q$  be distinct primes with  $p, q > 3$  and  $p \equiv q \pmod{4}$ . Then  $h(-3pq) \equiv 0 \pmod{4}$ .

*Proof.* Let  $p = 6m + j$  and  $q = 6m' + j'$ , where  $j, j' = 1$  or  $5$  and  $m$  and  $m'$  are non-negative integers. The number of summands in  $S_{31}(\chi_{pq})$  is  $[pq/3]$ , and we observe that  $[pq/3] \equiv [jj'/3] \pmod{2}$ . Of these summands,  $[q/3] = 2m' + [j'/3]$  are multiples of  $p$ , and  $[p/3] = 2m + [j/3]$  are multiples of  $q$ . Thus,

$$S_{31}(\chi_{pq}) \equiv [jj'/3] - [j'/3] - [j/3] \pmod{2}.$$

By examining all of the possibilities for the pair  $j, j'$ , we find that  $S_{31}(\chi_{pq})$  is always even. The result now follows from (4.6).

It is clear that the same type of argument yields congruences from  $h(-12pq)$  and  $h(-24pq)$ .

The class number formulae (4.6) and (4.7) appear to be due originally to Lerch [44, pp. 402, 408]. Holden [36] has also given a proof of (4.7).

## 5. SUMS OVER INTERVALS OF LENGTH $k/5$ .

**THEOREM 5.1.** Let  $\chi$  be odd and let  $\chi_{5k}(n) = \left(\frac{n}{5}\right) \chi(n)$ . Then

$$(5.1) \quad S_{51} = \frac{1}{4\pi i} G(\chi) \{ (5 - \bar{\chi}(5)) L(1, \bar{\chi}) - 5^{1/2} L(1, \bar{\chi}_{5k}) \}$$

and

$$(5.2) \quad S_{52} = \frac{1}{2\pi i} 5^{1/2} G(\chi) L(1, \bar{\chi}_{5k}).$$