

# 9. SUMS OVER INTERVALS OF LENGTH $k/12$ .

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

9. SUMS OVER INTERVALS OF LENGTH  $k/12$ .

THEOREM 8.1. Let  $\chi$  be even,  $\chi_{3k}(n) = \left(\frac{n}{3}\right) \chi(n)$ , and  $\chi_{4k}(n) = \chi_4(n) \chi(n)$ . Then

$$S_{12,1} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \{ [1 + \bar{\chi}(3)] L(1, \bar{\chi}_{4k}) + \frac{1}{2} 3^{1/2} \bar{\chi}(2) [1 + \bar{\chi}(2)] L(1, \bar{\chi}_{3k}) \},$$

$$S_{12,2} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \{ -[1 + \bar{\chi}(3)] L(1, \bar{\chi}_{4k}) + \frac{1}{2} 3^{1/2} [2 + \bar{\chi}(2) - \bar{\chi}(4)] L(1, \bar{\chi}_{3k}) \},$$

$$S_{12,3} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \{ 2L(1, \bar{\chi}_{4k}) - 3^{1/2} [1 + \bar{\chi}(2)] L(1, \bar{\chi}_{3k}) \},$$

$$S_{12,4} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \{ -2L(1, \bar{\chi}_{4k}) + 3^{1/2} L(1, \bar{\chi}_{3k}) \},$$

$$S_{12,5} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \{ [1 + \bar{\chi}(3)] L(1, \bar{\chi}_{4k}) - \frac{1}{2} 3^{1/2} [2 + \bar{\chi}(2) + \bar{\chi}(4)] L(1, \bar{\chi}_{3k}) \},$$

and

$$S_{12,6} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \{ -[1 + \bar{\chi}(3)] L(1, \bar{\chi}_{4k}) + \frac{1}{2} 3^{1/2} \bar{\chi}(2) [1 + \bar{\chi}(2)] L(1, \bar{\chi}_{3k}) \}.$$

Let  $\chi$  be odd and let  $\chi_{12k}(n) = \left(\frac{n}{3}\right) \chi_4(n) \chi(n)$ . Then

$$(9.1) \quad S_{12,1} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{2} [4 - \bar{\chi}(2) \{1 - \bar{\chi}(2)\} \{1 - \bar{\chi}(3)\}] L(1, \bar{\chi}) - 3^{1/2} L(1, \bar{\chi}_{12k}) \right\},$$

$$S_{12,2} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \bar{\chi}(2) - 1 \right] [1 - \bar{\chi}(2)] [1 - \bar{\chi}(3)] L(1, \bar{\chi}) \right. \\ \left. + 3^{1/2} L(1, \bar{\chi}_{12k}) \right\},$$

$$S_{12,3} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} [1 - \bar{\chi}(2)] [1 + \bar{\chi}(2) - \bar{\chi}(3)] L(1, \bar{\chi}),$$

$$S_{12,4} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} \{ \bar{\chi}(2) [\bar{\chi}(2) - 1] + 1 - \bar{\chi}(3) \} L(1, \bar{\chi}),$$

$$S_{12,5} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{2} [\bar{\chi}(3) - 1] [2 + \bar{\chi}(2) - \bar{\chi}(4)] L(1, \bar{\chi}) \right. \\ \left. + 3^{1/2} L(1, \bar{\chi}_{12k}) \right\},$$

and

$$S_{12,6} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{2} [1 - \bar{\chi}(2)] [4 + \bar{\chi}(2) \{ 1 - \bar{\chi}(3) \}] L(1, \bar{\chi}) \right. \\ \left. - 3^{1/2} L(1, \bar{\chi}_{12k}) \right\}.$$

COROLLARY 9.2. If  $d > 0$ , we have

$$S_{12,1} > 0, \quad \text{if } \chi(2) = 1, \text{ or if } \chi(3) \neq -1;$$

$$S_{12,1} = 0, \quad \text{if } \chi(2) \neq 1 \text{ and } \chi(3) = -1;$$

$$S_{12,2} > 0, \quad \text{if } \chi(2) \neq -1 \text{ and } \chi(3) = -1;$$

$$S_{12,2} = 0, \quad \text{if } \chi(2) = \chi(3) = -1;$$

$$S_{12,2} < 0, \quad \text{if } \chi(2) = -1 \text{ and } \chi(3) \neq -1;$$

$$S_{12,3} > 0, \quad \text{if } \chi(2) = -1;$$

$$S_{12,5} < 0, \quad \text{if } \chi(3) = -1;$$

$$S_{12,6} > 0, \quad \text{if } \chi(2) = 1 \text{ and } \chi(3) = -1;$$

$$S_{12,6} = 0, \quad \text{if } \chi(2) \neq 1 \text{ and } \chi(3) = -1;$$

and

$$S_{12,6} < 0, \quad \text{if } \chi(2) \neq 1 \text{ and } \chi(3) \neq -1.$$

If  $d < 0$ , we have

$$S_{12,2} > 0, \quad \text{if } \chi(2) = 1, \text{ or if } \chi(3) = 1;$$

$$S_{12,3} > 0, \quad \text{if } \chi(2) = \chi(3) = -1, \text{ or if } \chi(2) = 0 \\ \text{and } \chi(3) \neq 1;$$

$$S_{12,3} = 0, \quad \text{if } \chi(2) = 1, \text{ or if } \chi(2) = 0 \text{ and } \chi(3) = 1, \\ \text{or if } \chi(2) = -1 \text{ and } \chi(3) = 0;$$

$$S_{12,3} < 0, \quad \text{if } \chi(2) = -1 \text{ and } \chi(3) = 1;$$

$$S_{12,4} > 0, \quad \text{if } \chi(2) = -1, \text{ or if } \chi(2) \neq -1 \text{ and} \\ \chi(3) \neq 1;$$

$$S_{12,4} = 0, \quad \text{if } \chi(2) \neq -1 \text{ and } \chi(3) = 1;$$

$$S_{12,5} > 0, \quad \text{if } \chi(2) = -1, \text{ or if } \chi(3) = 1;$$

and

$$S_{12,6} < 0, \quad \text{if } \chi(2) = 1.$$

COROLLARY 9.3. We have

$$h(-12p) \equiv 0 \pmod{8}, \quad \text{if } p \equiv 23 \pmod{24},$$

and

$$h(-12p) \equiv 4 \pmod{8}, \quad \text{if } p \equiv 7, 11, 19 \pmod{24}.$$

*Proof.* From (9.1) and (2.4),

$$(9.2) \quad S_{12,1}(\chi_p) = \frac{1}{4} \left\{ 4 + \left[ 1 - \left( \frac{2}{p} \right) \right] \left[ 1 - \left( \frac{3}{p} \right) \right] \right\} h(-p) - \frac{1}{4} h(-12p).$$

If  $p \equiv j \pmod{24}$ ,  $1 \leq j \leq 23$ , then

$$(9.3) \quad S_{12,1}(\chi_p) \equiv [j/12] \pmod{2}.$$

From (9.2) and (9.3) we deduce that

$$4 [j/12] \equiv \left\{ 4 + \left[ 1 - \left( \frac{2}{p} \right) \right] \left[ 1 - \left( \frac{3}{p} \right) \right] \right\} h(-p) - h(-12p) \pmod{8}.$$

The desired congruences now readily follow.

The special case,  $p \equiv 19 \pmod{24}$ , of Corollary 9.3 was important in Stark's work [59]. Brown [13], [14] has also given proofs of this special case.

Some of the class number formulas arising from Theorem 9.1 were actually stated by Gauss [26] with the proofs given by Dedekind [21]. Several class number formulas involving the sums  $S_{12,i}$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , were discovered by Lerch [44, pp. 407, 408, 414], Holden [36], [38], [39], Karpinski [42], and Rédei [57].