Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1976)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: OPÉRATIONS D'ADAMS EN THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

Autor: Kervaire, Michel

Kapitel: §3. DÉFINITION DES OPÉRATIONS D'ADAMS.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48172

Il est évident que la formule

$$\lambda_m(\alpha+\beta) = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i\alpha) \, . \, (\lambda_{m-i}\,\beta)$$

ne fait que traduire l'identité

$$\lambda(\alpha+\beta) = (\lambda\alpha) \, . \, (\lambda\beta) \, .$$

Remarque. λ_m commute à l'involution $*$: $R(FG) \to R(FG)$ définie au § 1. Enfin, λ_m commute aux homomorphismes de restriction f^* : $R(FG') \to R(FG)$ pour $f : G \to G'$, ainsi qu'aux homomorphismes d'extensions de scalaires.

§ 3. Définition des opérations d'Adams.

Soient $t_1, ..., t_N$ des indéterminées. Pour tout entier n tel que $1 \leqq n \leqq N$, on considère le polynôme symétrique $t_1{}^n + t_2{}^n + ... + t_N{}^n$ et son expression unique $Q_n^N(s_1, ..., s_n)$ comme polynôme en les fonctions symétriques élémentaires $s_1, ..., s_n$ de degré $\leqq n$ des indéterminées $t_1, ..., t_N$. Les fonctions $s_1, ..., s_k, ...$ sont définies par l'identité

$$X^N - s_1 X^{N-1} + ... + (-1)^i s_i X^{N-i} + ... + (-1)^N s_N = \prod_{\nu=1}^{N} (X - t_\nu)$$

avec les conventions $s_k = 0$ pour $k > N$ et $s_0 = 1$. On observe, en faisant $t_{N'+1} = t_{N'+2} = ... = t_N = 0$ (où $N' \leqq N$), que

$$s_i(t_1, \ldots, t_{N'}, 0, \ldots, 0) = s_i(t_1, \ldots, t_{N'})$$

pour $i \leqq N'$.

Exemples.

$$Q_1(s_1) = s_1, \; Q_2(s_1, s_2) = s_1{}^2 - 2s_2 \, ,$$
$$Q_3(s_1, s_2, s_3) = s_1{}^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3 \, ,$$
$$Q_4(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1{}^4 - 4s_1{}^2 s_2 + 2s_2{}^2 + 4s_1 s_3 - 4s_4 \, ,$$

où l'on a écrit Q_i au lieu de Q_i^N pour simplifier l'écriture.

En fait, le polynôme $Q_n^N(s_1, ..., s_n)$ en tant que polynôme en $s_1, ..., s_n$ est indépendant de N pourvu que $N \geqq n$. Cela résulte d'une identité dont nous aurons encore besoin plus bas, exprimée par le lemme qui suit.

Soient $t_1', ..., t_N'$ et $t_1'', ..., t_{N''}''$ deux suites d'intéderminées et $t_1, ..., t_N$ leur juxtaposition, i.e. $N = N' + N''$ et $t_i = t_i'$ pour $1 \leqq i \leqq N'$, $t_{N'+j} = t_j''$ pour $1 \leqq j \leqq N''$. Soient $s_1', ..., s_{N'}'$ et $s_1'', ..., s_{N''}''$ les fonctions symétriques élémentaires des $t_1', ..., t_{N'}'$ et $t_1'', ..., t_{N''}''$ respectivement. Enfin, soient $s_1, ..., s_N$ les fonctions symétriques élémentaires des $t_1, ..., t_N$.

LEMME 1. *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} s_i' \cdot s_{n-i}'' .$$

De plus,

$$Q_n^N(s_1, \ldots, s_n) = Q_n^{N'}(s_1', \ldots, s_n') + Q_n^{N''}(s_1'', \ldots, s_n'') .$$

La première formule résulte immédiatement des identités de définition des s_i' et s_j'' en calculant leur produit et en le comparant à l'identité de définition des s_n.

La deuxième identité est une trivialité après avoir remplacé les polynômes Q_n par leur expression en fonction des t.

Il résulte tout d'abord du lemme que $Q_n^N(s_1, \ldots, s_n)$ est indépendant de N pour $N \geqq n$. En effet, si l'on envoie $t_1'', \ldots, t_{N''}''$ sur 0, on obtient $s_i' = s_i$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$ si $n \leqq N'$, comme on l'a observé ci-dessus, et $s_j'' = 0$ pour $j > 0$. Donc, $Q_n^N(s_1, \ldots, s_n) = Q_n^{N'}(s_1, \ldots, s_n)$ pourvu que $N \geqq N' \geqq n$.

On écrira Q_n pour Q_n^N avec $n \leqq N$.

On a aussi

$$\begin{aligned} &Q_n - s_1 Q_{n-1} + \ldots + (-1)^i s_i Q_{n-i} + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} s_{n-1} Q_1 + (-1)^n n\, s_n = 0 \end{aligned}$$

en remplaçant successivement X par $t_1, \ldots, t_n$ dans l'identité de définition des s_i et en sommant membre à membre. Ceci montre par récurrence sur n que $Q_n(s_1, \ldots, s_n)$ est un polynôme à coefficients entiers.

On voit aussi que $Q_n(s_1, 0, \ldots, 0) = s_1{}^n$.

On peut alors définir l'opération d'Adams Ψ_n, $n \in \mathbf{Z}$ sur un FG-module V comme suit.

DÉFINITION. $\Psi_0 V = (\dim V) . 1$,
où 1 est l'élément unité de $R(FG)$;

$$\Psi_n V = Q_n(\lambda_1 V, \lambda_2 V, \ldots, \lambda_n V) \text{ pour } n > 0 ,$$

le membre de droite étant regardé comme un élément de $R(FG)$;

$$\Psi_{-n} V = \Psi_n V^*, \text{ où } n > 0 .$$

Pour démontrer que ces formules déterminent une opération $\Psi_n : R(FG) \to R(FG)$ nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 2. *Soient* R *un anneau commutatif avec élément unité, et* $\{\lambda_i'\}$, $\{\lambda_i''\}$ *et* $\{\lambda_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$ *trois suites d'éléments de* R *telles que* $\lambda_0' = \lambda_0'' = \lambda_0 = 1$, *et*

$$\lambda_m = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i' \cdot \lambda_{m-i}''$$

pour tout $m \geqq 0$. *Alors pour tout* $n \geqq 1$, *on a*

$$Q_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = Q_n(\lambda_1', \ldots, \lambda_n') + Q_n(\lambda_1'', \ldots, \lambda_n'') .$$

Ceci résulte immédiatement de l'indépendance algébrique des fonctions symétriques élémentaires. Il existe un homomorphisme

$$h : \mathbf{Z}[s_1', \ldots, s_N', s_1'', \ldots, s_{N''}''] \to R ,$$

tel que $h(s_i') = \lambda_i'$ et $h(s_j'') = \lambda_j''$. Cet homomorphisme envoie s_m sur λ_m en vertu du lemme 1 et de l'hypothèse

$$\lambda_m = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i' \cdot \lambda_{m-i}'' .$$

Il s'ensuit que h envoie $Q_n(s_1, \ldots, s_n)$ sur $Q_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et l'assertion résulte de l'identité $Q_n = Q_n' + Q_n''$ du lemme 1.

LEMME 3. *Pour tout* n *entier, l'opération* Ψ_n *sur les* FG*-modules induit un endomorphisme de groupe additif*

$$\Psi_n : R(F\,G) \to R(F\,G) .$$

En outre, pour $n > 0$, *on a*

$$\Psi_n(\alpha) = Q_n(\lambda_1\alpha, \ldots, \lambda_n\alpha)$$

pour tout $\alpha \in R(FG)$.

Si $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ est une suite exacte de FG-modules, le lemme du paragraphe précédent dit que

$$\lambda_m V = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i V') \cdot (\lambda_{m-i} V'') .$$

D'après le lemme 2 ci-dessus appliqué avec

$$\lambda_m = \lambda_m V,\ \lambda_i' = \lambda_i V',\ \lambda_j'' = \lambda_j V'' ,$$

on a donc

$$\Psi_n V = \Psi_n V' + \Psi_n V'' ,$$

pour $n > 0$.

Il en résulte immédiatement que $\Psi_n : R(FG) \to R(FG)$ est bien définie et additive pour tout entier n.

La formule

$$\Psi_n(\alpha) = Q_n(\lambda_1\alpha, \ldots, \lambda_n\alpha)$$

pour $\alpha \in R(FG)$ quelconque est conséquence de l'additivité de Ψ_n et de celle en α de $Q_n(\lambda_1\alpha, \ldots, \lambda_n\alpha)$.