§ 4. Propriétés élémentaires des opérations d'Adams.

Il est clair tout d'abord que les Ψ_n sont fonctorielles, i.e. si $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes finis, et $f^* : R(FG') \to R(FG)$ l'homomorphisme de restriction, on a

$$\Psi_n f^* = f^* \Psi_n ,$$

pour tout entier n. De même pour une extension de corps $F \to E$, on a $i\Psi_n = \Psi_n i$, avec $i : R(FG) \to R(EG)$ l'homomorphisme d'extension de scalaires.

Ceci résulte du fait que f^* et i sont des homomorphismes de λ-anneaux, i.e. commutent avec les opérations λ_m.

Par contre Ψ_n ne commute *pas* en général aux homomorphismes *induits*. Exemple: Prendre $f : \{1\} \to C_2$, où C_2 est cyclique d'ordre 2 et calculer $\Psi_2 f_* - f_* \Psi_2$ sur l'élément unité de $R(FC_2)$, où F est de caractéristique $\neq 2$. On trouve $2 - [FC_2] \neq 0$.

Nous commençons une liste des propriétés des $\Psi_n : R(FG) \to R(FG)$, où comme ci-dessus, G est un groupe fini et F un corps commutatif.

(1) Les opérations Ψ_n sont des homomorphismes de λ-anneaux, i.e.

$$\Psi_n(\alpha . \beta) = \Psi_n(\alpha) . \Psi_n(\beta), \text{ et } \Psi_n \lambda_m = \lambda_m \Psi_n .$$

(2) Pour m, n entiers quelconques, on a

$$\Psi_{m \cdot n} = \Psi_m . \Psi_n = \Psi_n . \Psi_m .$$

(3) Si α est la classe d'un FG-module de dimension 1 sur F, on a

$$\Psi_n(\alpha) = \alpha^n, \text{ où } \alpha^{-m} = (\alpha^*)^m \text{ pour } m > 0 .$$

(4) Pour tout p premier et tout $\alpha \in R(FG)$, on a

$$\Psi_p(\alpha) = \alpha^p \bmod p\, R(F\, G) .$$

Ces propriétés sont les analogues des propriétés des opérations d'Adams en topologie. On a en outre quelques propriétés plus typiquement algébriques qui proviennent de relations entre les opérations Ψ_n et l'action des automorphismes du corps de base sur l'anneau des représentations virtuelles.

Soient E un corps commutatif et $\sigma \in \mathrm{Aut}(E)$ un automorphisme de E. A tout EG-module V on associe un nouveau EG-module σV obtenu comme suit. En tant que groupes abéliens σV et V sont égaux. L'élément $v \in V$ considéré comme élément de σV sera noté σv. L'action de EG sur σV est définie par

$$a \,.\, \sigma(v) = \sigma\big(\sigma^{-1}(a)\, v\big),$$

où

$$\sigma^{-1}(a) = \textstyle\sum_{s \in G} \sigma^{-1}(a_s)\, s,$$

si

$$a = \textstyle\sum_{s \in G} a_s\, s.$$

Dans cette formule, $\sigma^{-1}(a)\, v$ est défini par l'action de EG sur V, et $\sigma\big(\sigma^{-1}(a)\, v\big)$ est l'élément de σV correspondant à $\sigma^{-1}(a)\, v \in V$.

Il est facile de voir que si $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ est une suite exacte de EG-modules, la suite $0 \to \sigma V' \to \sigma V \to \sigma V'' \to 0$ est également une suite exacte de EG-modules. Il en résulte que σ induit un automorphisme $\sigma : R(EG) \to R(EG)$. C'est un automorphisme d'anneau.

On vérifie sans difficulté que σ commute aux homomorphismes de restriction, induits, d'extension de scalaires, à l'involution, aux puissances extérieures et opérations d'Adams.

Exercice. Si $\rho(s) = (S_{ij})$ est la forme matricielle de V associée à la base $e_1, \ldots, e_n$ de V, alors la forme matricielle de σV par rapport à $\sigma e_1, \ldots, \sigma e_n$ est donnée par $(\sigma\rho)(s) = (\sigma S_{ij})$.

Définitions. Soient G un groupe fini et p un nombre premier. On dira que $s \in G$ est *p-régulier* si l'ordre de s est premier à p. Par convention tout élément de G est 0-régulier.

Le p.p.c.m. des ordres des éléments p-réguliers de G sera appelé l'*exposant p-régulier* de G. L'exposant 0-régulier est donc simplement l'exposant de G.

Nous pouvons continuer la liste des propriétés des Ψ_n.

(5) *Les opérations* Ψ_n *sont périodiques,* i.e. *si* m *est l'exposant p-régulier de* G, *où* $p =$ caract (F), *on a*

$$\Psi_{n+m} = \Psi_n : R(F\,G) \to R(F\,G)$$

pour tout entier n.

(6) *Si* F *contient les racines du polynôme* $X^m - 1$, *où* m *est l'exposant p-régulier de* $G, p =$ caract (F), *et si* $\sigma \in \mathrm{Aut}(F)$ *et* $s \in \mathbf{Z}$ *sont liés par* $\sigma(\xi) = \xi^s$ *pour toute racine* ξ *de* $X^m - 1$, *alors* $\Psi_s(\alpha) = \sigma(\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in R(FG)$.

Remarque. Il existe un théorème de périodicité des opérations d'Adams en topologie. (Cf. J.F. Adams, *On the groups* $J(X)$—III, *Topology*, Vol. 3

(1965), 193-222, en particulier le § 5.) Mais il ne semble pas y avoir de rapport entre ce théorème et la propriété (5) ci-dessus.

Enfin, en considérant l'injection de $\mathbf{F}_q$ (le corps fini à q éléments) dans une clôture algébrique et en prenant σ = automorphisme de Frobenius, on obtient comme corollaire la propriété suivante:

(7) *L'opération* $\Psi_q : R(\mathbf{F}_q G) \to R(\mathbf{F}_q G)$ *est l'identité.*

Toutes ces propriétés sont faciles à démontrer en tenant compte des théorèmes I et II du § 1.

Les propriétés (3) et (4) se vérifient comme en topologie.

Démonstration de (3). Si V est un FG-module de dimension 1 sur F, il s'agit de voir que $\Psi_n(V) = V^n$. Or, l'hypothèse entraîne que

$$\lambda_2 V = \lambda_3 V = \dots = 0 .$$

Donc pour n positif, on a

$$\Psi_n V = Q_n(\lambda_1 V, 0, \dots, 0) = (\lambda_1 V)^n = V^n .$$

On en déduit immédiatement la propriété (3).

Remarque. On a donc en fait $\Psi_n(\alpha) = \alpha^n$ dès que $\lambda_i \alpha = 0$ pour $i > 1$. Cependant cette formulation n'est pas plus générale que la précédente. En effet, si $\alpha \in R(FG)$ satisfait à $\lambda_i \alpha = 0$ pour $i > 1$, alors α est la classe d'un FG-module de dimension 1. Pour le voir, il suffit de remarquer que les classes de FG-modules de dimension 1 sont inversibles dans l'anneau $R(FG)$, i.e. si dim $V = 1$, le produit $V \otimes V^*$ est isomorphe au FG-module trivial F. (Ceci justifie la convention $[V]^{-1} = [V^*]$ pour dim $V = 1$ faite précédemment.) L'isomorphisme est donné par $v \otimes v^* \to v^*(v)$. Si alors $\alpha = U - V$ et $\lambda_i \alpha = 0$ pour $i > 1$, on compare les termes de plus haut degré en t dans l'identité $\lambda(\alpha) \,.\, \lambda(V) = \lambda(U)$. On trouve $\alpha \,.\, \text{dét}(V) = \text{dét}(U)$, où $\text{dét}(V) = \lambda_{\dim V}(V)$ est de dimension 1. Donc, α est la classe dans $R(FG)$ de $\text{dét}(U) \,.\, \{\text{dét}(V)\}^{-1} = \text{dét}(U) \,.\, \text{dét}(V^*)$.

D'une manière générale, pour que $\alpha \in R(FG)$ soit la classe d'une représentation il est évidemment nécessaire que $\lambda(\alpha)$ soit un polynôme. Mais cette condition n'est pas suffisante.

Exemple. Soient $G = S_4$, le groupe des permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \mathbf{C}$. Il existe un $\mathbf{C}S_4$-module simple V de dimension 3 avec la forme matricielle

$$\rho(12) = \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}, \quad \rho(12)(34) = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix},$$

$$\rho(123) = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\}, \ \rho(1234) = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right\}.$$

(C'est le produit de la représentation signe par la composante simple de degré 3 dans la représentation de permutation naturelle.)

En calculant les valeurs propres, on vérifie sans difficulté que $\lambda V = 1 + Vt + Vt^2 + t^3$. Donc, $\lambda(V-1) = 1 + (V-1)t + t^2$, un polynôme. Cependant $V - 1$ est strictement virtuelle.

La propriété (4), i.e. $\Psi_p(\alpha) = \alpha^p \bmod pR(FG)$ résulte immédiatement de l'identité $Q_p(s_1, ..., s_p) = s_1{}^p \bmod p\mathbf{Z}[s_1, ..., s_p]$, elle-même conséquence directe de

$$t_1{}^p + ... + t_p{}^p = (t_1 + ... + t_p)^p \bmod p\,\mathbf{Z}[t_1, ..., t_p].$$

Pour démontrer les propriétés (1) et (2), on utilise les théorèmes I et II. Puisque Ψ_n commute aux homomorphismes $i : R(FG) \to R(EG)$ d'extension de scalaires et commute également aux homomorphismes de restrictions $R(FG) \to R(FC)$, il suffit de démontrer (1) et (2) dans le cas d'un groupe cyclique et avec un corps de base algébriquement clos E.

Comme d'autre part $R(EC)$ est engendré par les classes des EC-modules simples, il est suffisant de vérifier (1) et (2) lorsque les variables sont les classes de EC-modules simples. (On observera toutefois que cette réduction pour la formule $\Psi_n \lambda_m = \lambda_m \Psi_n$ exige de savoir déjà que Ψ_n est un homomorphisme d'anneau. La démonstration de $\Psi_n(\alpha.\beta) = \Psi_n(\alpha) . \Psi_n(\beta)$ doit donc précéder celle de $\Psi_n \lambda_m = \lambda_m \Psi_n$.)

Or, on a vu au § 1 que tous les EC-modules simples sont de dimension 1 sur E. Pour un EC-module de dimension 1, la vérification de (1) et (2) par calcul direct est immédiate.

Pour démontrer (5) et (6) il est également suffisant, en vertu du théorème II, de se borner au cas d'un groupe cyclique C dont l'ordre divise l'exposant p-régulier m du groupe donné G. (p = caract (F).) On peut aussi supposer pour démontrer (5) que le corps de base E contient les racines du polynôme $X^m - 1$.

Tout EC-module simple est alors de dimension 1 sur E et de la forme E_χ, où $\chi \in \text{Hom}(C, E^\cdot)$, l'action de C sur E_χ étant donnée par

$$s \,.\, z = \chi(s)\, z, \ \ s \in C, \ \ z \in E_\chi .$$

On a donc

$$\Psi_n(E_\chi) = E(\chi^n), \text{ et } \Psi_{n+m} E_\chi = \Psi_n E_\chi$$

résulte de $\chi^{n+m} = \chi^n$. (Card C divise m.) Comme les classes des EC-modules simples engendrent $R(EC)$, il en résulte

$$\Psi_{n+m} = \Psi_n : R(E\,C) \to R(E\,C)\,,$$

puis (5) en général par la réduction faite ci-dessus.

Pour (6), on se sert des mêmes remarques. On a

$$\Psi_s(E_\chi) = E(\chi^s)$$

comme on vient de le voir. Il reste à vérifier que $\sigma(E_\chi) = E(\chi^s)$, c.-à-d. que C opère sur $\sigma(E_\chi)$ par

$$x\,.\,\sigma\, z = \chi^s(x)\,\sigma\, z,\ \ z \in E_\chi,\ \ x \in C\,.$$

Or,

$$x\,.\,\sigma\, z = \sigma\big(\sigma^{-1}(x)\,.\,z\big) = \sigma(x.z) = \sigma\big(\chi(x)\,z\big) = \sigma\big(\chi(x)\big)\,.\,\sigma\, z\,,$$

et

$$\sigma\big(\chi(x)\big) = \chi^s(x)\,,$$

puisque $\chi(x)$ est racine m-ième de l'unité.

La propriété (7) est un corollaire facile de (6). Soit E une clôture algébrique de $\mathbf{F}_q$, le corps à q éléments et soit $\sigma \in \mathrm{Aut}\,(E/\mathbf{F}_q)$ l'automorphisme de Frobenius, i.e. $\sigma(a) = a^q$ pour tout $a \in E$. Comme $i : R(\mathbf{F}_q G) \to R(EG)$ est injectif et commute à Ψ_q, il est suffisant de voir que $\Psi_q\, i = i$. Or, d'après (6), $\Psi_q\,\beta = \sigma\beta$ pour tout $\beta \in R(EG)$. Si $\beta = i\alpha$ on vérifie facilement que $\sigma\beta = \beta$. (C'est trivial sur la forme matricielle d'une représentation.) Donc, $\Psi_q\, i\alpha = i\alpha$, et $\Psi_q\,\alpha = \alpha$ en résulte.

Remarque. Si σ appartient au sous-groupe des commutateurs de Aut (F), son action sur $R(FG)$ est triviale.

§ 5. Action de Ψ_n dans le groupe des classes de projectifs

Il existe un analogue $K(FG)$ de $R(FG)$ construit à l'aide des FG-modules projectifs. Soit L' le groupe abélien libre sur l'ensemble des classes d'isomorphie de FG-modules projectifs de dimension finie. On considère le sous-groupe L_0' de L' engendré par les éléments $P - P' - P''$ s'il existe une suite exacte $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$. (On a alors nécessairement $P \cong P' \oplus P''$.)