

§5. Action de Ψ_n dans le groupe des classes de projectifs

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

résulte de $\chi^{n+m} = \chi^n$. (Card C divise m .) Comme les classes des EC -modules simples engendrent $R(EC)$, il en résulte

$$\Psi_{n+m} = \Psi_n : R(EC) \rightarrow R(EC),$$

puis (5) en général par la réduction faite ci-dessus.

Pour (6), on se sert des mêmes remarques. On a

$$\Psi_s(E_\chi) = E(\chi^s)$$

comme on vient de le voir. Il reste à vérifier que $\sigma(E_\chi) = E(\chi^s)$, c.-à-d. que C opère sur $\sigma(E_\chi)$ par

$$x \cdot \sigma z = \chi^s(x) \sigma z, \quad z \in E_\chi, \quad x \in C.$$

Or,

$$x \cdot \sigma z = \sigma(\sigma^{-1}(x) \cdot z) = \sigma(x \cdot z) = \sigma(\chi(x) z) = \sigma(\chi(x)) \cdot \sigma z,$$

et

$$\sigma(\chi(x)) = \chi^s(x),$$

puisque $\chi(x)$ est racine m -ième de l'unité.

La propriété (7) est un corollaire facile de (6). Soit E une clôture algébrique de \mathbf{F}_q , le corps à q éléments et soit $\sigma \in \text{Aut}(E/\mathbf{F}_q)$ l'automorphisme de Frobenius, i.e. $\sigma(a) = a^q$ pour tout $a \in E$. Comme $i : R(\mathbf{F}_q G) \rightarrow R(EG)$ est injectif et commute à Ψ_q , il est suffisant de voir que $\Psi_q i = i$. Or, d'après (6), $\Psi_q \beta = \sigma \beta$ pour tout $\beta \in R(EG)$. Si $\beta = i\alpha$ on vérifie facilement que $\sigma \beta = \beta$. (C'est trivial sur la forme matricielle d'une représentation.) Donc, $\Psi_q i\alpha = i\alpha$, et $\Psi_q \alpha = \alpha$ en résulte.

Remarque. Si σ appartient au sous-groupe des commutateurs de $\text{Aut}(F)$, son action sur $R(FG)$ est triviale.

§ 5. ACTION DE Ψ_n DANS LE GROUPE DES CLASSES DE PROJECTIFS

Il existe un analogue $K(FG)$ de $R(FG)$ construit à l'aide des FG -modules projectifs. Soit L' le groupe abélien libre sur l'ensemble des classes d'isomorphie de FG -modules projectifs de dimension finie. On considère le sous-groupe L'_0 de L' engendré par les éléments $P - P' - P''$ s'il existe une suite exacte $0 \rightarrow P' \rightarrow P \rightarrow P'' \rightarrow 0$. (On a alors nécessairement $P \cong P' \oplus P''$.)

DÉFINITION. $K(FG) = L'/L'_0$.

$K(FG)$ est également un foncteur covariant en F . Si $f: G \rightarrow G'$ est un homomorphisme de groupes, on a toujours un homomorphisme induit $f_*: K(FG) \rightarrow K(FG')$ déterminé par $P \rightarrow FG' \otimes_{FG} P$, mais la restriction n'existe que si FG' est projectif de type fini sur FG ce qui a lieu (G et G' étant finis) si G est sous-groupe de G' . (FG' est même alors FG -libre). Dans ce cas, $f: G \subset G'$ (finis), on a donc un homomorphisme de restriction $f^*: K(FG') \rightarrow K(FG)$.

Il est évident que l'on a un homomorphisme de groupes abéliens

$$c: K(FG) \rightarrow R(FG)$$

appelé homomorphisme de Cartan.

On va voir que $K(FG)$ est également muni d'opérations d'Adams qui sont compatibles, via c , avec les opérations sur $R(FG)$.

Remarque. $K(FG)$ n'a en général pas de λ -structure compatible via c avec celle de $R(FG)$. Exemple: Soient F le corps à 2 éléments et G le groupe cyclique d'ordre 2. On constate que $K(FG) = \mathbf{Z}$ engendré par $[FG]$, et $R(FG) = \mathbf{Z}$ engendré par la classe de F . L'application $c: K(FG) \rightarrow R(FG)$ envoie $[FG]$ sur 2 fois le générateur $[F]$ de $R(FG)$. Or, $\lambda_2(FG) F \notin cK(FG)$.

La définition des Ψ_n du § 3 est donc inapplicable pour $K(FG)$.

On va donner une nouvelle définition des Ψ_n inspirée par une construction analogue en topologie due à M. Atiyah. (*Quart. Journal of Math.* 17 (1966), 165-193. Cf. formule (2.7).)

Le point essentiel est la définition de Ψ_l pour l premier, $l \neq \text{caract}(F)$. La définition ci-dessous fonctionne aussi bien pour $K(FG)$ que pour $R(FG)$.

Soient V un FG -module et V^l la l -ième puissance tensorielle de V . Le groupe S_l de permutations des indices $\{1, \dots, l\}$ opère sur V^l par

$$\alpha \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_l) = v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_l}$$

où

$$i_k = \alpha^{-1}(k), \alpha \in S_l, k = 1, \dots, l.$$

Soit γ la permutation circulaire des indices $1, \dots, l$, i.e. $\gamma(i) = i + 1 \pmod{l}$. On notera C_l le sous-groupe (cyclique) de S_l engendré par γ . Soit enfin E le corps des racines sur F du polynôme $X^l - 1$. Comme on a supposé $l \neq \text{caract}(F)$, le EC_l -module EV^l se décompose en une somme directe

$$EV^l = \bigoplus_{\xi \in \mu_l} (EV^l)_\xi,$$

où μ_l est le groupe des racines de $X^l - 1$ dans E et $(EV^l)_\xi$ est le sous-espace propre de EV^l pour la valeur propre ξ de γ , i.e. $(EV^l)_\xi = \text{Ker}(\gamma - \xi)$.

Il est évident que $(EV^l)_\xi$ est sous EG -module de EV^l .

On a $(EV^l)_\xi \cong E \otimes_F V(\xi)$, où $V(\xi)$ est un FG -module univoquement déterminé.

Ceci va résulter du lemme classique suivant.

LEMME. Soient W un EG -module et π un groupe fini d'automorphismes de E avec corps fixe F . Supposons que π opère sur W par automorphismes semi-linéaires, i.e.

$$\sigma(aw) = \sigma(a)\sigma(w),$$

pour tout $a \in E$, $w \in W$, $\sigma \in \pi$ et que les actions de π et G commutent.

Soit $S : W \rightarrow W$ définie par $S(w) = \sum_{\sigma \in \pi} \sigma(w)$. Alors, $S(W)$ est un sous- FG -module de W et $W \cong E \otimes_F S(W)$.

Remarque. Si, par ailleurs, on dispose déjà d'un FG -module U tel que $W = E \otimes_F U$, et si $1 \otimes U$ est stable pour l'action de π , alors $U \cong S(W)$, comme FG -modules.

En effet, soit $\{\sigma a\}_{\sigma \in \pi}$ une base normale de E/F . On définit $h : U \rightarrow S(W)$ par $h(u) = \sum_{\sigma \in \pi} \sigma(a \otimes u)$. Il est clair que h commute à l'action de G . D'autre part h est injectif car

$$\sum_{\sigma \in \pi} \sigma(a \otimes u) = \sum_{\sigma \in \pi} \sigma(a) \cdot \sigma(1 \otimes u) = 0$$

entraîne $u = 0$ puisque $\{\sigma(a)\}$ est une F -base de E et $\sigma(1 \otimes u) \in 1 \otimes U$ par hypothèse. Comme $\dim_F U = \dim_E W = \dim_F S(W)$, il en résulte que h est un isomorphisme.

Pour démontrer le lemme, on construit un EG -homomorphisme $f : E \otimes_F S(W) \rightarrow W$ par $f(\sum_i a_i \otimes w_i) = \sum_i a_i w_i$. On voit que f est surjectif en prenant une forme $\phi \in \text{Hom}_E(W, E)$ dont on suppose qu'elle s'annule sur $f(E \otimes_F S(W))$ et en utilisant le théorème de l'indépendance des automorphismes pour démontrer que $\phi = 0$. On constate l'injectivité de f en écrivant les éléments de $E \otimes_F S(W)$ sous la forme $\sum_{\sigma \in \pi} \sigma a \otimes w_\sigma$, où $\{\sigma a\}_{\sigma \in \pi}$ est une base normale de E/F et en observant que les éléments de $S(W)$ sont invariants par l'action de π .

On va appliquer ce lemme avec $W = (EV^l)_\xi$ et $\pi = \text{Gal}(E/F)$.

On fait opérer $\pi = \text{Gal}(E/F)$ sur V^l comme suit :

On a l'injection $\pi = \text{Gal}(E/F) \rightarrow U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$ donnée par

$$\sigma \rightarrow s \text{ mod } l \text{ si } \sigma(\xi) = \xi^s$$

pour tout $\xi \in \mu_l$. D'autre part, à $s \in U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$ on associe la permutation α_s donnée par

$$\alpha_s(i+1) = is + 1 \pmod{l}.$$

La composition $\pi \rightarrow U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}) \rightarrow S_l$, notée $\sigma \rightarrow \alpha_\sigma$, suivie de l'action de S_l sur V^l fournit une action de π sur V^l .

On pose alors

$$\sigma(a \otimes v) = \sigma(a) \otimes \alpha_\sigma(v)$$

pour $a \in E, v \in V^l$.

Il est clair que cette formule définit une action semi-linéaire de π sur EV^l qui commute à l'action de G et laisse stable $1 \otimes V^l$.

On vérifie que $\alpha_s \cdot \gamma = \gamma^s \cdot \alpha_s$ pour tout $s \in U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$. On a donc

$$\sigma \gamma(v) = \gamma^s \sigma(v), v \in EV^l$$

et $\sigma \xi = \xi^s$ pour tout $\xi \in \mu_l$ et par suite l'action de π préserve $(EV^l)_\xi$. En effet,

$$\gamma \sigma(v) = \sigma(\gamma^{s'}v) = \sigma(\xi^{s'}v) = \sigma(\xi^{s'}) \sigma(v) = \xi \sigma(v),$$

où $ss' = 1 \pmod{l}$.

En vertu du lemme, on a donc

$$(EV^l)_\xi \cong E \otimes_F V(\xi),$$

avec

$$V(\xi) = S(EV^l)_\xi,$$

où

$$S(w) = \sum_{\sigma \in \pi} \sigma(w), w \in (EV^l)_\xi.$$

DÉFINITION. $\Psi'_l(V) = [V(1)] - [V(\zeta)]$, où ζ est un générateur (quelconque) du groupe $\mu_l \subset E$ des racines de $X^l - 1$ et $[]$ désigne la classe du module entre crochets dans le groupe de Grothendieck $K(FG)$, resp. $R(FG)$.

Cette définition exige de vérifier

- (1) que $V(1)$ et $V(\zeta)$ sont FG -projectifs si c'est le cas pour V ,
- (2) que $[V(\zeta)]$ est indépendant du générateur choisi $\zeta \in \mu_l$.

Pour contrôler (1), on observe que

$$S(EV^l) = \bigoplus_{\xi \in \mu_l} S(EV^l)_\xi = \bigoplus_{\xi \in \mu_l} V(\xi).$$

Comme V^l est stable par π , la remarque qui suit le lemme ci-dessus entraîne

$$V^l \cong S(EV^l) = \bigoplus_{\xi \in \mu_l} V(\xi)$$

ce qui montre bien que $V(\xi)$ est projectif si c'est le cas pour V , et donc pour V^l .

Pour démontrer (2) on va en fait exhiber un isomorphisme de FG -modules $V(\zeta) \cong V(\eta)$ pour deux générateurs quelconques $\zeta, \eta \in \mu_l$. Puisque ζ, η sont des générateurs de μ_l , il existe un entier n premier à l et tel que $\eta = \zeta^n$. Soit, comme ci-dessus, $\alpha_n \in S_l$ la permutation donnée par la formule

$$\alpha_n(i+1) = in + 1 \pmod{l}.$$

On a vu que $\alpha_n \cdot \gamma = \gamma^n \cdot \alpha_n$. Il en résulte que l'on a un EG -homomorphisme $\alpha_n : (EV^l)_\eta \rightarrow (EV^l)_\zeta$. C'est évidemment un isomorphisme, par symétrie de la construction. D'autre part α_n commute à l'action de π et fournit donc un FG -isomorphisme $\alpha_n : S(EV^l)_\eta \rightarrow S(EV^l)_\zeta$.

La définition a donc un sens. Pour démontrer que Ψ'_l induit une opération (additive) sur $K(FG)$, resp. $R(FG)$, il suffit de vérifier que si $0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow V \rightarrow 0$ est une suite exacte de FG -modules, projectifs si l'on s'intéresse à $K(FG)$, on a

$$\Psi'_l V_1 = \Psi'_l V_0 + \Psi'_l V.$$

Soit Q le FG -module défini par la suite exacte

$$0 \rightarrow Q \rightarrow V_1^l \rightarrow V^l \rightarrow 0.$$

Comme ci-dessus, on a des opérations semi-linéaires de $\pi = \text{Gal}(E/F)$ sur EV_1^l, EV^l et donc sur EQ , ainsi que des actions de S_l sur ces modules. Il est clair que $EV_0^l \subset EQ$ et EV_0^l est stable par G, π, S_l . On va démontrer que

$$[S(EQ/EV_0^l)_1] = [S(EQ/EV_0^l)_\xi]$$

pour tout $\xi \in \mu_l$, où l'indice ξ signifie que l'on prend l'espace propre pour la valeur propre ξ de γ , la permutation circulaire ($\gamma(i) = i + 1 \pmod{l}$), et S est définie comme ci-dessus $S = \sum_{\sigma \in \pi} \sigma$.

La suite exacte

$$0 \rightarrow EQ/EV_0^l \rightarrow EV_1^l/EV_0^l \rightarrow EV^l \rightarrow 0$$

se décompose en somme directe de suites

$$0 \rightarrow (EQ/EV_0^l)_\xi \rightarrow (EV_1^l/EV_0^l)_\xi \rightarrow (EV^l)_\xi \rightarrow 0$$

exactes pour chaque $\xi \in \mu_l$. D'où

$$0 \rightarrow S(EQ/EV_0^l)_\xi \rightarrow S(EV_1^l/EV_0^l)_\xi \rightarrow S(EV^l)_\xi \rightarrow 0.$$

On a évidemment aussi les suites exactes

$$0 \rightarrow S(EV_0^l)_\xi \rightarrow S(EV_1^l)_\xi \rightarrow S(EV_1^l/EV_0^l)_\xi \rightarrow 0.$$

A condition d'avoir démontré que les modules considérés sont projectifs si V_0 , V_1 et V le sont, on a alors

$$[S(EV^l)_\xi] = [S(EV_1^l)_\xi] - [S(EV_0^l)_\xi] - [S(EQ/EV_0^l)_\xi].$$

En soustrayant membre à membre ces égalités pour $\xi = 1$ et $\xi = \zeta$, un générateur de μ_l , on obtient

$$\Psi'_l V = \Psi'_l V_1 - \Psi'_l V_0.$$

Reste donc à démontrer que $[S(EQ/EV_0^l)_\xi]$ a un sens dans $K(FG)$, resp. $R(FG)$ et ne dépend pas de $\xi \in \mu_l$.

Pour toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$ avec $\varepsilon_k = 0$ ou 1 , posons $V_\varepsilon = V_{\varepsilon_1} \otimes V_{\varepsilon_2} \otimes \dots \otimes V_{\varepsilon_l}$. C'est un sous FG -module de V_1^l . On note $|\varepsilon| = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_l$. Les égalités $|\varepsilon| = 0$ et $|\varepsilon| = l$ caractérisent les suites $(0, \dots, 0)$ et $(1, \dots, 1)$ respectivement. D'autre part, les V_ε avec $|\varepsilon| = \lambda$, constant, sont permutés entre eux par S_l . De même, les EV_ε sont permutés entre eux par π . On voit que

$$Q = \sum_{|\varepsilon| < l} V_\varepsilon.$$

Les FG -modules V_ε fournissent une filtration de Q . Pour tout λ tel que $0 \leq \lambda \leq l - 1$, on pose

$$Q_\lambda = \sum_{|\varepsilon| \leq \lambda} V_\varepsilon.$$

Les Q_λ sont des sous FG -modules de Q et

$$Q = Q_{l-1} \supset \dots \supset Q_1 \supset Q_0 = V_0^l.$$

De même $EQ = EQ_{l-1} \supset \dots \supset EQ_1 \supset EQ_0 = EV_0^l$, et les groupes π et S_l préservent la filtration.

On va expliciter la structure de $E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})$ pour $\lambda \neq 0, l$.

Notation. Soit W_ε le produit tensoriel obtenu en remplaçant par V chaque facteur V_1 dans V_ε . E.g. si $l = 5$, $\varepsilon = (1, 1, 0, 0, 1)$, on a

$$V_\varepsilon = V_1 \otimes V_1 \otimes V_0 \otimes V_0 \otimes V_1$$

et

$$W_\varepsilon = V \otimes V \otimes V_0 \otimes V_0 \otimes V.$$

On a une application évidente surjective $V_\varepsilon \rightarrow W_\varepsilon$ qui commute à l'action de G . Remarquons aussi que tous les W_ε sont projectifs si V et V_0 le sont.

Il est commode de faire opérer S_l sur les suites $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$ par permutation des indices. Le fait essentiel est que C_l opère *sans point fixe* sur l'ensemble des suites ε telles que $|\varepsilon| \neq 0, l$. Il en résulte que les C_l -orbites de ces suites ont toutes la même cardinalité l (qui est premier). Rappelons d'autre part que à $\sigma \in \pi$ tel que $\sigma \xi = \xi^s$, on a associé la permutation $\alpha_\sigma \in S_l$ donnée par $\alpha_\sigma(i+1) = is + 1 \pmod{l}$. Comme les α_σ normalisent C_l , il en résulte que π opère sur les orbites de C_l . Comme de plus π est abélien, il est facile de voir qu'il existe un système R_λ de représentants des C_l -orbites dans l'ensemble des suites ε telles que $|\varepsilon| = \lambda \neq 0$, qui est *stable par l'action de π* .

Ces remarques permettent d'expliciter la structure de $E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})$. Je dis que

$$E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1}) \cong EC_l \otimes_E (\bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} EW_\varepsilon)$$

par un isomorphisme qui commute avec les actions de G sur le deuxième facteur et de C_l sur le premier (dans le membre de droite). On s'occupera plus tard de l'action de π .

On définit $f_\lambda : EC_l \otimes_E (\bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} EW_\varepsilon) \rightarrow E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})$ comme suit. Soit $z = \gamma^i \otimes w$ avec $w = w_1 \otimes \dots \otimes w_l \in W_\varepsilon$ et γ le générateur choisi de C_l . Pour $\varepsilon_k = 1$, on a $w_k \in V$ et pour $\varepsilon_k = 0$, $w_k \in V_0$. Pour chaque indice k tel que $\varepsilon_k = 1$, on choisit un élément $v_k \in V_1$ se projetant sur w_k par la flèche donnée $V_1 \rightarrow V$. Si $\varepsilon_k = 0$, on définit v_k par $v_k = w_k \in V_0$. On pose

$$f_\lambda(\gamma^i \otimes w) = \gamma^i \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_l) \in E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1}).$$

Il est facile de voir que f_λ est bien définie sur les éléments de la forme $\gamma^i \otimes w$. On l'étend à $EC_l \otimes_E (\bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} EW_\varepsilon)$ tout entier par linéarité.

Il est clair que f_λ commute à l'action de G naturelle sur $\bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} EW_\varepsilon$ et triviale sur EC_l . Il est également évident que f_λ est surjective. Pour voir que f_λ est un isomorphisme, on compare les dimension sur E des deux membres.

$$\dim_E EC_l \otimes_E (\bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} EW_\varepsilon) = l \cdot \frac{1}{l} \binom{l}{\lambda} \cdot (\dim_F V)^\lambda (\dim_\lambda V_0)^{l-\lambda}.$$

On utilise ici le fait que C_l opère sans point fixe sur $\{\varepsilon, |\varepsilon| \neq 0, l\}$ pour dénombrer $\text{Card } R_\lambda = \frac{1}{l} \cdot \binom{l}{\lambda}$. Chacune de ces dimensions est supérieure ou égale à $\dim_F Q_\lambda/Q_{\lambda-1}$. Or,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{l-1} \binom{l}{\lambda} \cdot (\dim V)^\lambda (\dim V_0)^{l-\lambda} &= (\dim V + \dim V_0)^l - \dim V^l - \dim V_0^l \\ &= \dim V_1^l - \dim V^l - \dim V_0^l \\ &= \dim(Q/V_0^l) = \sum_{\lambda=1}^{l-1} \dim Q_\lambda/Q_{\lambda-1}. \end{aligned}$$

Donc, chaque f_λ , $\lambda = 1, \dots, l - 1$ est un isomorphisme.

Comme f_λ commute à l'action de C_l , on a

$$\begin{aligned} E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi &\cong (E C_l \otimes_E (\bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} E W_\varepsilon))_\xi \\ &\cong (E C_l)_\xi \otimes_E (\bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} E W_\varepsilon), \end{aligned}$$

puisque l'action de C_l dans le deuxième membre se réduit à l'action sur le premier facteur $E C_l$.

En outre, on remarque que le membre de droite est EG -isomorphe à $\bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} E W_\varepsilon$ puisque $(E C_l)_\xi$ est de dimension 1 et que G y opère trivialement.

Le EG -module $E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi$ est donc finalement isomorphe à $\bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} E W_\varepsilon$ qui est indépendant de $\xi \in \mu_l$.

Reste à voir comment ces isomorphismes se comportent pour l'action de $\pi = \text{Gal}(E/F)$. On fait agir $\sigma \in \pi$ sur $E C_l$ par

$$\sigma(\sum_i a_i \gamma^i) = \sum_i \sigma(a_i) \gamma^{is},$$

où $s \bmod l$ est déterminé par $\sigma(\xi) = \xi^s$ pour tout $\xi \in \mu_l$. On prend l'action diagonale de π sur $E C_l \otimes_E (\bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} E W_\varepsilon)$, en observant que π opère bien sur le deuxième facteur car R_λ est stable par π . On vérifie alors sans difficulté que $f_\lambda \sigma = \sigma f_\lambda$.

Un choix de vecteur base pour $(E C_l)_\xi$ est

$$u = \frac{1}{l} \sum_i \xi^{-i} \gamma^i$$

et cet élément est invariant par π . Donc,

$$f_\lambda : (E C_l)_\xi \otimes_E (\bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} E W_\varepsilon) \rightarrow E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi$$

commute à l'action de π , et il en est de même de l'isomorphisme

$$g_\lambda : (E C_l)_\xi \otimes_E (\bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} E W_\varepsilon) \rightarrow \bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} E W_\varepsilon$$

puisque π opère trivialement sur u .

Ainsi,

$$g_\lambda \cdot f_\lambda^{-1} : E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \rightarrow \bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} E W_\varepsilon$$

est un isomorphisme de EG -modules qui commute à l'action de π et il en résulte:

$$S E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \cong S(\bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} E W_\varepsilon) \cong \bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} W_\varepsilon.$$

(Le deuxième isomorphisme en vertu de la remarque qui suit le lemme.)

On conclut que

$$S E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \cong \bigoplus_{\varepsilon \in R_\lambda} W_\varepsilon$$

est indépendant de ξ à FG -isomorphisme près et est un FG -module projectif si V_0, V et donc W_ε le sont.

On considère les suites exactes

$$0 \rightarrow E(Q_{\lambda-1}/V_0^l) \rightarrow E(Q_\lambda/V_0^l) \rightarrow E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1}) \rightarrow 0$$

qui fournissent les suites exactes

$$0 \rightarrow SE(Q_{\lambda-1}/V_0^l)_\xi \rightarrow SE(Q_\lambda/V_0^l)_\xi \rightarrow SE(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \rightarrow 0.$$

On voit alors par récurrence sur $\lambda = 1, \dots, l-1$ que $SE(Q_\lambda/V_0^l)_\xi$ est FG -projectif si V_0, V le sont, et que sa classe $[SE(Q_\lambda/V_0^l)_\xi]$ est indépendante de ξ . Explicitement, on obtient

$$[SE(Q/V_0^l)_\xi] = \sum_{\lambda=1}^{l-1} (-1)^{l-\lambda-1} [\oplus_{\varepsilon \in R_\lambda} W_\varepsilon].$$

On a donc démontré

$$\Psi'_l(V_1) = \Psi'_l(V_0) + \Psi'_l(V).$$

Il reste à vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(FG) & \xrightarrow{c} & R(FG) \\ \downarrow \Psi'_l & & \downarrow \Psi_l \\ K(FG) & \xrightarrow{c} & R(FG) \end{array}$$

commute. Ceci est facile. Il est suffisant de vérifier $\text{res} . i (c\Psi'_l - \Psi_l c) = 0$, avec $\text{res} . i : R(FG) \rightarrow R(LG) \rightarrow \prod_{C \in \mathcal{C}} R(LC)$, où L est une clôture algébrique de F et \mathcal{C} est la famille des sous-groupes cycliques p -réguliers de G .

On sait que Ψ_l commute à $\text{res} . i$. Pour Ψ'_l le même résultat est de vérification facile. On est donc ramené à démontrer $c\Psi'_l V - \Psi_l c V = 0$ dans le cas où F est algébriquement clos et G est cyclique (d'ordre premier à $\text{caract}(F)$). On peut même supposer que V est un FG -module simple, donc de dimension 1, puisque Ψ'_l et Ψ_l sont toutes deux additives.

Le groupe cyclique C_l opère alors trivialement sur V^l comme on le voit en identifiant V à F (comme F -espace vectoriel) puis V^l à F par

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_l \rightarrow x_1 \dots x_l \in F.$$

Dans ce cas, on a donc

$$\text{Ker}(\gamma - 1) = V^l, \text{ et } \text{Ker}(\gamma - \xi) = 0.$$

Comme $\pi = \{1\}$ puisque F est algébriquement clos, on obtient

$$\Psi'_l(V) = [V^l] = [V]^l \in K(FG).$$

Donc,

$$c\Psi'_l(V) = c[V]^l = \Psi_l c(V).$$

On notera également Ψ_l l'endomorphisme $\Psi'_l : K(FG) \rightarrow K(FG)$.

Résumé. Soient F un corps de caractéristique p et G un groupe fini. Pour tout nombre premier $l \neq p$, il existe une opération d'Adams $\Psi_l : K(FG) \rightarrow K(FG)$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(FG) & \xrightarrow{c} & R(FG) \\ \downarrow \Psi_l & & \downarrow \Psi_l \\ K(FG) & \xrightarrow{c} & R(FG) \end{array}$$

commute.

Remarques. On peut maintenant définir $\Psi_m : K(FG) \rightarrow K(FG)$ pour tout m premier à $p = \text{caract}(F)$ par

$$\Psi_m = \prod_i \Psi_{l_i}^{e_i}, \text{ ou } m = \prod_i l_i^{e_i}.$$

(Avant de savoir que c est injectif, prendre les facteurs Ψ_{l_i} dans un ordre fixé, par exemple celui prescrit par $l_1 < l_2 < \dots$.)

On a $\Psi_m c = c \Psi_m$ pour tout m premier à p .

Soit en particulier m l'exposant p -régulier de G . Par définition m est premier à p . Pour tout FG -module projectif P , on a par périodicité

$$(\dim_F P) \cdot 1 = \Psi_0 c(P) = \Psi_m c(P) = c \Psi_m(P) \in c K(FG).$$

Il en résulte facilement que $R(FG)/cK(FG)$ a pour exposant *exact* le p.g.c.d. des dimensions des FG -modules projectifs.

Cet exposant est évidemment un diviseur de $\text{Card } G = \dim_F FG$.

Comme $R(FG)$ est de génération finie, $R(FG)/cK(FG)$ est un groupe fini.

On voit assez facilement que $K(FG)$ et $R(FG)$ sont abéliens libres de même rang. On retrouve donc le fait que c est injective. (Cf. [Serre], p. 136, Cor. 2.)

Il est facile de montrer que l'exposant de Coker c est la plus grande puissance de p divisant $\text{Card } G$.

En effet, soient $l \neq p$ un nombre premier et $H = H_l$ un l -sous-groupe de Sylow de G . Puisque l est premier à p , le FH -module trivial F est FH -projectif. (La surjection $FH \rightarrow F$ admet la section $a \rightarrow \frac{a}{[H:1]} \sum_{s \in H} s$.) Donc $P_l = FG \otimes_{FH} F$ est FG -projectif. On a $\dim_F P_l = [G:H]$. Il est clair que

$$\text{p.g.c.d. } \{[G:H_l], \text{ pour } l \neq p\} = p^n,$$

la plus grande puissance de p divisant $\text{Card } G$. Donc l'exposant de Coker c divise p^n .

Soit maintenant H un p -sous-groupe de Sylow de G . On a $\text{Card } H = p^n$. Si P est FG -projectif, il est aussi FH -projectif par restriction, et on

voit facilement que cela implique FH -libre. Donc $\dim_F P$ est un multiple de $[H:1] = p^n$. (Cf. [Serre], p. 145, Exercice 3.)

L'exposant de Coker c est donc exactement p^n .

Il reste encore à définir

$$\Psi_p : K(FG) \rightarrow K(FG),$$

où $p = \text{caract}(F)$

Dans le cas où F est parfait, e.g. algébriquement clos, la définition est dictée par le fait que F admet l'automorphisme de Frobenius $\sigma : F \rightarrow F$ tel que $\sigma(a) = a^p$. D'après la propriété (6) au § 4, $\Psi_p(\alpha) = \sigma(\alpha)$ pour tout $\alpha \in R(FG)$.

On n'a donc pas le choix:

$$\Psi_p(P) = \sigma(P),$$

où $\sigma(P)$ est évidemment FG -projectif si P l'est.

Pour attraper $\Psi_p : K(FG) \rightarrow K(FG)$ pour F quelconque, on peut utiliser le fait bien connu que $i_K : K(FG) \rightarrow K(LG)$ est une injection directe. ($\text{caract}(F) \neq 0$, L une clôture algébrique de F . Cf. [Serre], p. 136.) Donc, Coker i_K est sans torsion.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(FG) & \xrightarrow{c_F} & R(FG) \\ \downarrow i_K & & \downarrow i_R \\ K(LG) & \xrightarrow{c_L} & R(LG) \end{array}$$

nous apprend alors que

$$c_L : \text{Coker } i_K \rightarrow \text{Coker } i_R$$

est injectif. (Compte tenu du fait démontré ci-dessus que Coker c_F est fini.)

Or, pour tout $\alpha \in K(FG)$, on a

$$c_L \Psi_p i_K \alpha = \Psi_p c_L i_K \alpha = \Psi_p i_K c_F \alpha = i_R \Psi_p c_F \alpha.$$

Donc, $c_L \Psi_p i_K \alpha$ représente $0 \in \text{Coker } i_R$. Il en résulte que $\Psi_p i_K \alpha \in i_K K(FG)$ et il existe un élément $\beta \in K(FG)$, unique puisque i_K est injectif, tel que $\Psi_p i_K \alpha = i_K \beta$. On pose $\Psi_p \alpha = \beta$.

La définition de Ψ_n pour n entier quelconque est immédiate et dictée par les propriétés $\Psi_{kn} = \Psi_k \cdot \Psi_n$ et la périodicité ou la propriété $\Psi_{-n}(\alpha) = (\Psi_n \alpha)^*$.

(Reçu le 5 mai 1975)

M. Kervaire

Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
1211 Genève 24