Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1976)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: OPÉRATIONS D'ADAMS EN THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

Autor: Kervaire, Michel

Kapitel: §5. Action de Ψ_n dans le groupe des classes de projectifs

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48172

résulte de $\chi^{n+m} = \chi^n$. (Card C divise m.) Comme les classes des EC-modules simples engendrent $R(EC)$, il en résulte

$$\Psi_{n+m} = \Psi_n : R(E\,C) \to R(E\,C)\,,$$

puis (5) en général par la réduction faite ci-dessus.

Pour (6), on se sert des mêmes remarques. On a

$$\Psi_s(E_\chi) = E(\chi^s)$$

comme on vient de le voir. Il reste à vérifier que $\sigma(E_\chi) = E(\chi^s)$, c.-à-d. que C opère sur $\sigma(E_\chi)$ par

$$x\,.\,\sigma\,z = \chi^s(x)\,\sigma\,z,\ \ z \in E_\chi,\ \ x \in C\,.$$

Or,

$$x\,.\,\sigma\,z = \sigma\big(\sigma^{-1}(x)\,.\,z\big) = \sigma(x.z) = \sigma\big(\chi(x)\,z\big) = \sigma\big(\chi(x)\big)\,.\,\sigma\,z\,,$$

et

$$\sigma\big(\chi(x)\big) = \chi^s(x)\,,$$

puisque $\chi(x)$ est racine m-ième de l'unité.

La propriété (7) est un corollaire facile de (6). Soit E une clôture algébrique de $\mathbf{F}_q$, le corps à q éléments et soit $\sigma \in \mathrm{Aut}\,(E/\mathbf{F}_q)$ l'automorphisme de Frobenius, i.e. $\sigma(a) = a^q$ pour tout $a \in E$. Comme $i : R(\mathbf{F}_q G) \to R(EG)$ est injectif et commute à Ψ_q, il est suffisant de voir que $\Psi_q\, i = i$. Or, d'après (6), $\Psi_q\,\beta = \sigma\beta$ pour tout $\beta \in R(EG)$. Si $\beta = i\alpha$ on vérifie facilement que $\sigma\beta = \beta$. (C'est trivial sur la forme matricielle d'une représentation.) Donc, $\Psi_q\, i\alpha = i\alpha$, et $\Psi_q\,\alpha = \alpha$ en résulte.

Remarque. Si σ appartient au sous-groupe des commutateurs de $\mathrm{Aut}\,(F)$, son action sur $R(FG)$ est triviale.

§ 5. Action de Ψ_n dans le groupe des classes de projectifs

Il existe un analogue $K(FG)$ de $R(FG)$ construit à l'aide des FG-modules projectifs. Soit L' le groupe abélien libre sur l'ensemble des classes d'isomorphie de FG-modules projectifs de dimension finie. On considère le sous-groupe L_0' de L' engendré par les éléments $P - P' - P''$ s'il existe une suite exacte $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$. (On a alors nécessairement $P \cong P' \oplus P''$.)

DÉFINITION. $K(FG) = L'/L'_0$.

$K(FG)$ est également un foncteur covariant en F. Si $f: G \to G'$ est un homomorphisme de groupes, on a toujours un homomorphisme induit $f_*: K(FG) \to K(FG')$ déterminé par $P \to FG' \otimes_{FG} P$, mais la restriction n'existe que si FG' est projectif de type fini sur FG ce qui a lieu (G et G' étant finis) si G est sous-groupe de G'. (FG' est même alors FG-libre). Dans ce cas, $f: G \subset G'$ (finis), on a donc un homomorphisme de restriction $f^*: K(FG') \to K(FG)$.

Il est évident que l'on a un homomorphisme de groupes abéliens

$$c: K(FG) \to R(FG)$$

appelé homomorphisme de Cartan.

On va voir que $K(FG)$ est également muni d'opérations d'Adams qui sont compatibles, via c, avec les opérations sur $R(FG)$.

Remarque. $K(FG)$ n'a en général pas de λ-structure compatible via c avec celle de $R(FG)$. Exemple: Soient F le corps à 2 éléments et G le groupe cyclique d'ordre 2. On constate que $K(FG) = \mathbf{Z}$ engendré par $[FG]$, et $R(FG) = \mathbf{Z}$ engendré par la classe de F. L'application $c: K(FG) \to R(FG)$ envoie $[FG]$ sur 2 fois le générateur $[F]$ de $R(FG)$. Or, $\lambda_2(FG)$ $F \notin cK(FG)$.

La définition des Ψ_n du § 3 est donc inapplicable pour $K(FG)$.

On va donner une nouvelle définition des Ψ_n inspirée par une construction analogue en topologie due à M. Atiyah. (*Quart. Journal of Math.* 17 (1966), 165-193. Cf. formule (2.7).)

Le point essentiel est la définition de Ψ_l pour l premier, $l \neq$ caract (F). La définition ci-dessous fonctionne aussi bien pour $K(FG)$ que pour $R(FG)$.

Soient V un FG-module et V^l la l-ième puissance tensorielle de V. Le groupe S_l de permutations des indices $\{1, ..., l\}$ opère sur V^l par

$$\alpha.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_l) = v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_l}$$

où

$$i_k = \alpha^{-1}(k), \alpha \in S_l, k = 1, \ldots, l.$$

Soit γ la permutation circulaire des indices 1, ..., l, i.e. $\gamma(i) = i + 1 \bmod l$. On notera C_l le sous-groupe (cyclique) de S_l engendré par γ. Soit enfin E le corps des racines sur F du polynôme $X^l - 1$. Comme on a supposé $l \neq$ caract (F), le EC_l-module EV^l se décompose en une somme directe

$$EV^l = \oplus_{\xi \in \mu_l} (EV^l)_\xi,$$

où μ_l est le groupe des racines de $X^l - 1$ dans E et $(EV^l)_\xi$ est le sous-espace propre de EV^l pour la valeur propre ξ de γ, i.e. $(EV^l)_\xi = \operatorname{Ker}(\gamma - \xi)$.

Il est évident que $(EV^l)_\xi$ est sous EG-module de EV^l.

On a $(EV^l)_\xi \cong E \otimes_F V(\xi)$, *où* $V(\xi)$ *est un* FG*-module univoquement déterminé.*

Ceci va résulter du lemme classique suivant.

LEMME. *Soient* W *un* EG*-module et* π *un groupe fini d'automorphismes de* E *avec corps fixe* F*. Supposons que* π *opère sur* W *par automorphismes semi-linéaires*, i.e.

$$\sigma(aw) = \sigma(a)\sigma(w),$$

pour tout $a \in E$, $w \in W$, $\sigma \in \pi$ *et que les actions de* π *et* G *commutent.*

Soit $S : W \to W$ *définie par* $S(W) = \sum_{\sigma \in \pi} \sigma(w)$*. Alors,* $S(W)$ *est un sous-*FG*-module de* W *et* $W \cong E \otimes_F S(W)$.

Remarque. Si, par ailleurs, on dispose déjà d'un FG-module U tel que $W = E \otimes_F U$, et si $1 \otimes U$ est stable pour l'action de π, alors $U \cong S(W)$, comme FG-modules.

En effet, soit $\{\sigma a\}_{\sigma \in \pi}$ une base normale de E/F. On définit $h : U \to S(W)$ par $h(u) = \sum_{\sigma \in \pi} \sigma(a \otimes u)$. Il est clair que h commute à l'action de G. D'autre part h est injectif car

$$\sum_{\sigma \in \pi} \sigma(a \otimes u) = \sum_{\sigma \in \pi} \sigma(a) \,.\, \sigma(1 \otimes u) = 0$$

entraîne $u = 0$ puisque $\{\sigma(a)\}$ est une F-base de E et $\sigma(1 \otimes u) \in 1 \otimes U$ par hypothèse. Comme $\dim_F U = \dim_E W = \dim_F S(W)$, il en résulte que h est un isomorphisme.

Pour démontrer le lemme, on construit un EG-homomorphisme $f : E \otimes_F S(W) \to W$ par $f(\sum_i a_i \otimes w_i) = \sum_i a_i w_i$. On voit que f est surjectif en prenant une forme $\phi \in \operatorname{Hom}_E(W, E)$ dont on suppose qu'elle s'annule sur $f(E \otimes_F S(W))$ et en utilisant le théorème de l'indépendance des automorphismes pour démontrer que $\phi = 0$. On constate l'injectivité de f en écrivant les éléments de $E \otimes_F S(W)$ sous la forme $\sum_{\sigma \in \pi} \sigma a \otimes w_\sigma$, où $\{\sigma a\}_{\sigma \in \pi}$ est une base normale de E/F et en observant que les éléments de $S(W)$ sont invariants par l'action de π.

On va appliquer ce lemme avec $W = (EV^l)_\xi$ et $\pi = \operatorname{Gal}(E/F)$.

On fait opérer $\pi = \operatorname{Gal}(E/F)$ sur V^l comme suit:

On a l'injection $\pi = \operatorname{Gal}(E/F) \to U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$ donnée par

$$\sigma \to s \bmod l \text{ si } \sigma(\xi) = \xi^s$$

pour tout $\xi \in \mu_l$. D'autre part, à $s \in U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$ on associe la permutation α_s donnée par

$$\alpha_s(i+1) = is + 1 \bmod l .$$

La composition $\pi \to U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}) \to S_l$, notée $\sigma \to \alpha_\sigma$, suivie de l'action de S_l sur V^l fournit une action de π sur V^l.

On pose alors

$$\sigma(a \otimes v) = \sigma(a) \otimes \alpha_\sigma(v)$$

pour $a \in E, v \in V^l$.

Il est clair que cette formule définit une action semi-linéaire de π sur EV^l qui commute à l'action de G et laisse stable $1 \otimes V^l$.

On vérifie que $\alpha_s \,.\, \gamma = \gamma^s \,.\, \alpha_s$ pour tout $s \in U(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$. On a donc

$$\sigma\gamma(v) = \gamma^s \sigma(v), v \in E\, V^l$$

et $\sigma\,\xi = \xi^s$ pour tout $\xi \in \mu_l$ et par suite l'action de π préserve $(EV^l)_\xi$. En effet,

$$\gamma\,\sigma(v) = \sigma(\gamma^{s'}v) = \sigma(\zeta^{s'}v) = \sigma(\xi^{s'})\,\sigma(v) = \xi\,\sigma(v) ,$$

où $ss' = 1 \bmod l$.

En vertu du lemme, on a donc

$$(E\,V^l)_\xi \cong E \otimes_F V(\xi) ,$$

avec

$$V(\xi) = S(E\,V^l)_\xi ,$$

où

$$S(w) = \textstyle\sum_{\sigma \varepsilon \pi} \sigma(w),\ w \in (E\,V^l)_\xi .$$

Définition. $\Psi'_l(V) = [V(1)] - [V(\zeta)]$, où ζ est un générateur (quelconque) du groupe $\mu_l \subset E^\cdot$ des racines de $X^l - 1$ et [ ] désigne la classe du module entre crochets dans le groupe de Grothendieck $K(FG)$, resp. $R(FG)$.

Cette définition exige de vérifier

(1) que $V(1)$ et $V(\zeta)$ sont FG-projectifs si c'est le cas pour V,

(2) que $[V(\zeta)]$ est indépendant du générateur choisi $\zeta \in \mu_l$.

Pour contrôler (1), on observe que

$$S(E\,V^l) = \oplus_{\xi \in \mu_l} S(E\,V^l)_\xi = \oplus_{\xi \in \mu_l} V(\xi) .$$

Comme V^l est stable par π, la remarque qui suit le lemme ci-dessus entraîne

$$V^l \cong S(E\,V^l) = \oplus_{\xi \in \mu_l} V(\xi)$$

ce qui montre bien que $V(\xi)$ est projectif si c'est le cas pour V, et donc pour V^l.

Pour démontrer (2) on va en fait exhiber un isomorphisme de FG-modules $V(\zeta) \cong V(\eta)$ pour deux générateurs quelconques $\zeta,\ \eta \in \mu_l$. Puisque ζ, η sont des générateurs de μ_l, il existe un entier n premier à l et tel que $\eta = \zeta^n$. Soit, comme ci-dessus, $\alpha_n \in S_l$ la permutation donnée par la formule

$$\alpha_n(i+1) = in + 1 \bmod l\,.$$

On a vu que $\alpha_n \,.\, \gamma = \gamma^n \,.\, \alpha_n$. Il en résulte que l'on a un EG-homomorphisme $\alpha_n : (EV^l)_\eta \to (EV^l)_\zeta$. C'est évidemment un isomorphisme, par symétrie de la construction. D'autre part α_n commute à l'action de π et fournit donc un FG-isomorphisme $\alpha_n : S(EV^l)_\eta \to S(EV^l)_\zeta$.

La définition a donc un sens. Pour démontrer que Ψ_l' induit une opération (additive) sur $K(FG)$, resp. $R(FG)$, il suffit de vérifier que si $0 \to V_0 \to V_1 \to V \to 0$ est une suite exacte de FG-modules, projectifs si l'on s'intéresse à $K(FG)$, on a

$$\Psi_l' V_1 = \Psi_l' V_0 + \Psi_l' V\,.$$

Soit Q le FG-module défini par la suite exacte

$$0 \to Q \to V_1^l \to V^l \to 0\,.$$

Comme ci-dessus, on a des opérations semi-linéaires de $\pi = \mathrm{Gal}\,(E/F)$ sur EV_1^l, EV^l et donc sur EQ, ainsi que des actions de S_l sur ces modules. Il est clair que $EV_0^l \subset EQ$ et EV_0^l est stable par G, π, S_l. On va démontrer que

$$[S(E\,Q/E\,V_0^l)_1] = [S(E\,Q/E\,V_0^l)_\xi]$$

pour tout $\xi \in \mu_l$, où l'indice ξ signifie que l'on prend l'espace propre pour la valeur propre ξ de γ, la permutation circulaire $(\gamma(i) = i + 1 \bmod l)$, et S est définie comme ci-dessus $S = \sum_{\sigma \in \pi} \sigma$.

La suite exacte

$$0 \to E\,Q/E\,V_0^l \to E\,V_1^l/E\,V_0^l \to E\,V^l \to 0$$

se décompose en somme directe de suites

$$0 \to (E\,Q/E\,V_0^l)_\xi \to (E\,V_1^l/E\,V_0^l)_\xi \to (E\,V^l)_\xi \to 0$$

exactes pour chaque $\xi \in \mu_l$. D'où

$$0 \to S(E\,Q/E\,V_0^l)_\xi \to S(E\,V_1^l/E\,V_0^l)_\xi \to S(E\,V^l)_\xi \to 0\,.$$

On a évidemment aussi les suites exactes

$$0 \to S(E\,V_0^l)_\xi \to S(E\,V_1^l)_\xi \to S(E\,V_1^l/E\,V_0^l)_\xi \to 0\,.$$

A condition d'avoir démontré que les modules considérés sont projectifs si V_0, V_1 et V le sont, on a alors

$$[S(E\,V^l)_\xi] = [S(E\,V_1^l)_\xi] - [S(E\,V_0^l)_\xi] - [S(E\,Q/E\,V_0^l)_\xi]\,.$$

En soustrayant membre à membre ces égalités pour $\xi = 1$ et $\xi = \zeta$, un générateur de μ_l, on obtient

$$\Psi_l'\,V = \Psi_l'\,V_1 - \Psi_l'\,V_0\,.$$

Reste donc à démontrer que $[S(EQ/EV_0^l)_\xi]$ a un sens dans $K(FG)$, resp. $R(FG)$ et ne dépend pas de $\xi \in \mu_l$.

Pour toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l)$ avec $\varepsilon_k = 0$ ou 1, posons $V_\varepsilon = V_{\varepsilon_1} \otimes V_{\varepsilon_2} \otimes \ldots \otimes V_{\varepsilon_l}$. C'est un sous FG-module de V_1^l. On note $|\varepsilon| = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l$. Les égalités $|\varepsilon| = 0$ et $|\varepsilon| = l$ caractérisent les suites $(0, \ldots, 0)$ et $(1, \ldots, 1)$ respectivement. D'autre part, les V_ε avec $|\varepsilon| = \lambda$, constant, sont permutés entre eux par S_l. De même, les EV_ε sont permutés entre eux par π. On voit que

$$Q = \textstyle\sum_{|\varepsilon|<l} V_\varepsilon\,.$$

Les FG-modules V_ε fournissent une filtration de Q. Pour tout λ tel que $0 \leqq \lambda \leqq l-1$, on pose

$$Q_\lambda = \textstyle\sum_{|\varepsilon|\leqq\lambda} V_\varepsilon\,.$$

Les Q_λ sont des sous FG-modules de Q et

$$Q = Q_{l-1} \supset \ldots \supset Q_1 \supset Q_0 = V_0^l\,.$$

De même $EQ = EQ_{l-1} \supset \ldots \supset EQ_1 \supset EQ_0 = EV_0^l$, et les groupes π et S_l préservent la filtration.

On va expliciter la structure de $E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})$ pour $\lambda \neq 0, l$.

Notation. Soit W_ε le produit tensoriel obtenu en remplaçant par V chaque facteur V_1 dans V_ε. E.g. si $l = 5$, $\varepsilon = (1, 1, 0, 0, 1)$, on a

$$V_\varepsilon = V_1 \otimes V_1 \otimes V_0 \otimes V_0 \otimes V_1$$

et

$$W_\varepsilon = V \otimes V \otimes V_0 \otimes V_0 \otimes V\,.$$

On a une application évidente surjective $V_\varepsilon \to W_\varepsilon$ qui commute à l'action de G. Remarquons aussi que tous les W_ε sont projectifs si V et V_0 le sont.

Il est commode de faire opérer S_l sur les suites $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_l)$ par permutation des indices. Le fait essentiel est que C_l opère *sans point fixe* sur l'ensemble des suites ε telles que $|\varepsilon| \neq 0, l$. Il en résulte que les C_l-orbites de ces suites ont toutes la même cardinalité l (qui est premier). Rappelons d'autre part que à $\sigma \in \pi$ tel que $\sigma \xi = \xi^s$, on a associé la permutation $\alpha_\sigma \in S_l$ donnée par $\alpha_\sigma(i+1) = is + 1 \bmod l$. Comme les α_σ normalisent C_l, il en résulte que π opère sur les orbites de C_l. Comme de plus π est abelien, il est facile de voir qu'il existe un système R_λ de représentants des C_l-orbites dans l'ensemble des suites ε telles que $|\varepsilon| = \lambda \neq 0$, qui est *stable par l'action de* π.

Ces remarques permettent d'expliciter la structure de $E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})$. Je dis que

$$E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1}) \cong E\,C_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon \in R_\lambda} E\,W_\varepsilon)$$

par un isomorphisme qui commute avec les actions de G sur le deuxième facteur et de C_l sur le premier (dans le membre de droite). On s'occupera plus tard de l'action de π.

On définit $f_\lambda : EC_l \otimes_E (\otimes_{\varepsilon \in R_\lambda} E W_\varepsilon) \to E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})$ comme suit. Soit $z = \gamma^i \otimes w$ avec $w = w_1 \otimes ... \otimes w_l \in W_\varepsilon$ et γ le générateur choisi de C_l. Pour $\varepsilon_k = 1$, on a $w_k \in V$ et pour $\varepsilon_k = 0$, $w_k \in V_0$. Pour chaque indice k tel que $\varepsilon_k = 1$, on choisit un élément $v_k \in V_1$ se projettant sur w_k par la flèche donnée $V_1 \to V$. Si $\varepsilon_k = 0$, on définit v_k par $v_k = w_k \in V_0$. On pose

$$f_\lambda(\gamma^i \otimes w) = \gamma^i . (v_1 \otimes ... \otimes v_l) \in E\,Q_\lambda/Q_{\lambda-1} .$$

Il est facile de voir que f_λ est bien définie sur les éléments de la forme $\gamma^i \otimes w$. On l'étend à $EC_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon \in R_\lambda} E W_\varepsilon)$ tout entier par linéarité.

Il est clair que f_λ commute à l'action de G naturelle sur $\oplus_{\varepsilon \in R_\lambda} E W_\varepsilon$ et triviale sur EC_l. Il est également évident que f_λ est surjective. Pour voir que f_λ est un isomorphisme, on compare les dimension sur E des deux membres.

$$\dim_E E\,C_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon \in R_\lambda} E\,W_\varepsilon) = l . \frac{1}{l} \tbinom{l}{\lambda} . (\dim_F V)^\lambda (\dim_\lambda V_0)^{l-\lambda} .$$

On utilise ici le fait que C_l opère sans point fixe sur $\{\varepsilon, |\varepsilon| \neq 0, l\}$ pour dénombrer Card $R_\lambda = \frac{1}{l} . \binom{l}{\lambda}$. Chacune de ces dimensions est supérieure ou égale à $\dim_F Q_\lambda/Q_{\lambda-1}$. Or,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\lambda=1}^{l-1} \binom{l}{\lambda} . (\dim V)^\lambda (\dim V_0)^{l-\lambda} &= (\dim V + \dim V_0)^l - \dim V^l - \dim V_0^l \\ &= \dim V_1^l - \dim V^l - \dim V_0^l \\ &= \dim (Q/V_0^l) = \textstyle\sum_{\lambda=1}^{l-1} \dim Q_\lambda/Q_{\lambda-1} . \end{aligned}$$

Donc, chaque f_λ, $\lambda = 1, \ldots, l-1$ est un isomorphisme.

Comme f_λ commute à l'action de C_l, on a

$$\begin{aligned} E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi &\cong (E\,C_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon))_\xi \\ &\cong (E\,C_l)_\xi \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon)\,, \end{aligned}$$

puisque l'action de C_l dans le deuxième membre se réduit à l'action sur le premier facteur EC_l.

En outre, on remarque que le membre de droite est EG-isomorphe à $\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon$ puisque $(EC_l)_\xi$ est de dimension 1 et que G y opère trivialement.

Le EG-module $E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi$ est donc finalement isomorphe à $\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon$ qui est indépendant de $\xi \in \mu_l$.

Reste à voir comment ces isomorphismes se comportent pour l'action de $\pi = \mathrm{Gal}\,(E/F)$. On fait agir $\sigma \in \pi$ sur EC_l par

$$\sigma\left(\sum_i a_i \gamma^i\right) = \sum_i \sigma(a_i)\,\gamma^{is}\,,$$

où $s \bmod l$ est déterminé par $\sigma(\xi) = \xi^s$ pour tout $\xi \in \mu_l$. On prend l'action diagonale de π sur $EC_l \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} EW_\varepsilon)$, en observant que π opère bien sur le deuxième facteur car R_λ est stable par π. On vérifie alors sans difficulté que $f_\lambda\,\sigma = \sigma f_\lambda$.

Un choix de vecteur base pour $(EC_l)_\xi$ est

$$u = \frac{1}{l}\sum_i \xi^{-i}\,\gamma^i$$

et cet élément est invariant par π. Donc,

$$f_\lambda : (E\,C_l)_\xi \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon) \to E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi$$

commute à l'action de π, et il en est de même de l'isomorphisme

$$g_\lambda : (E\,C_l)_\xi \otimes_E (\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon) \to \oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon$$

puisque π opère trivialement sur u.

Ainsi,

$$g_\lambda \cdot f_\lambda^{-1} : E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \to \oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon$$

est un isomorphisme de EG-modules qui commute à l'action de π et il en résulte :

$$S\,E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \cong S(\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} E\,W_\varepsilon) \cong \oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} W_\varepsilon\,.$$

(Le deuxième isomorphisme en vertu de la remarque qui suit le lemme.)

On conclut que

$$S\,E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \cong \oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} W_\varepsilon$$

est indépendant de ξ à FG-isomorphisme près et est un FG-module projectif si V_0, V et donc W_ε le sont.

On considère les suites exactes

$$0 \to E(Q_{\lambda-1}/V_0^l) \to E(Q_\lambda/V_0^l) \to E(Q_\lambda/Q_{\lambda-1}) \to 0$$

qui fournissent les suites exactes

$$0 \to SE(Q_{\lambda-1}/V_0^l)_\xi \to SE(Q_\lambda/V_0^l)_\xi \to SE(Q_\lambda/Q_{\lambda-1})_\xi \to 0\,.$$

On voit alors par récurrence sur $\lambda = 1, \ldots, l-1$ que $SE\,(Q_\lambda/V_0^l)_\xi$ est FG-projectif si V_0, V le sont, et que sa classe $[SE\,(Q_\lambda/V_0^l)_\xi]$ est indépendante de ξ. Explicitement, on obtient

$$[SE(Q/V_0^l)_\xi] = \textstyle\sum_{\lambda=1}^{l-1}(-1)^{l-\lambda-1}[\oplus_{\varepsilon\in R_\lambda} W_\varepsilon]\,.$$

On a donc démontré

$$\Psi_l'(V_1) = \Psi_l'(V_0) + \Psi_l'(V)\,.$$

Il reste à vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(FG) & \xrightarrow{c} & R(FG) \\ \downarrow \Psi_l' & & \downarrow \Psi_l \\ K(FG) & \xrightarrow{c} & R(FG) \end{array}$$

commute. Ceci est facile. Il est suffisant de vérifier res . $i\,(c\Psi_l' - \Psi_l c) = 0$, avec res . $i : R(FG) \to R(LG) \to \prod_{C\in\mathscr{C}} R(LC)$, où L est une clôture algébrique de F et $\mathscr{C}$ est la famille des sous-groupes cycliques p-réguliers de G.

On sait que Ψ_l commute à res . i. Pour Ψ_l' le même résultat est de vérification facile. On est donc ramené à démontrer $c\,\Psi_l'\,V - \Psi_l\,c\,V = 0$ dans le cas où F est algébriquement clos et G est cyclique (d'ordre premier à caract (F)). On peut même supposer que V est un FG-module simple, donc de dimension 1, puisque Ψ_l' et Ψ_l sont toutes deux additives.

Le groupe cyclique C_l opère alors trivialement sur V^l comme on le voit en identifiant V à F (comme F-espace vectoriel) puis V^l à F par

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_l \to x_1 \ldots x_l \in F\,.$$

Dans ce cas, on a donc

$$\operatorname{Ker}(\gamma - 1) = V^l, \text{ et } \operatorname{Ker}(\gamma - \xi) = 0\,.$$

Comme $\pi = \{1\}$ puisque F est algébriquement clos, on obtient

$$\Psi_l'(V) = [V^l] = [V]^l \in K(FG)\,.$$

Donc,

$$c\,\Psi_l'(V) = c\,[V]^l = \Psi_l\,c\,(V)\,.$$

On notera également Ψ_l l'endomorphisme $\Psi_l' : K(FG) \to K(FG)$.

Résumé. Soient F un corps de caractéristique p et G un groupe fini. Pour tout nombre premier $l \neq p$, il existe une opération d'Adams $\Psi_l : K(FG) \to K(FG)$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(F\,G) & \xrightarrow{c} & R(F\,G) \\ \downarrow \Psi_l & & \downarrow \Psi_l \\ K(F\,G) & \xrightarrow{c} & R(F\,G) \end{array}$$

commute.

Remarques. On peut maintenant définir $\Psi_m : K(FG) \to K(FG)$ pour tout m premier à p = caract (F) par

$$\Psi_m = \prod_i \Psi_{l_i}^{e_i}, \text{ ou } m = \prod_i l_i^{e_i}.$$

(Avant de savoir que c est injectif, prendre les facteurs Ψ_{l_i} dans un ordre fixé, par exemple celui prescrit par $l_1 < l_2 < \dots$.)

On a $\Psi_m c = c\,\Psi_m$ pour tout m premier à p.

Soit en particulier m l'exposant p-régulier de G. Par définition m est premier à p. Pour tout FG-module projectif P, on a par périodicité

$$(\dim_F P)\,.\,1 = \Psi_0\, c(P) = \Psi_m\, c(P) = c\,\Psi_m(P) \in c\,K(F\,G)\,.$$

Il en résulte facilement que $R(FG)/c\,K(FG)$ a pour exposant *exact* le p.g.c.d. des dimensions des FG-modules projectifs.

Cet exposant est évidemment un diviseur de Card $G = \dim_F FG$.

Comme $R(FG)$ est de génération finie, $R(FG)/cK(FG)$ est un groupe fini.

On voit assez facilement que $K(FG)$ et $R(FG)$ sont abéliens libres de même rang. On retrouve donc le fait que c est injective. (Cf.[Serre], p. 136, Cor. 2.)

Il est facile de montrer que l'exposant de Coker c est la plus grande puissance de p divisant Card G.

En effet, soient $l \neq p$ un nombre premier et $H = H_l$ un l-sous-groupe de Sylow de G. Puisque l est premier à p, le FH-module trivial F est FH-projectif. (La surjection $FH \to F$ admet la section $a \to \dfrac{a}{[H:1]} \sum_{s \in H} s$.) Donc $P_l = FG \otimes_{FH} F$ est FG-projectif. On a $\dim_F P_l = [G:H]$. Il est clair que

$$\text{p.g.c.d. } \{[G:H_l], \text{ pour } l \neq p\} = p^n,$$

la plus grande puissance de p divisant Card G. Donc l'exposant de Coker c divise p^n.

Soit maintenant H un p-sous-groupe de Sylow de G. On a Card $H = p^n$. Si P est FG-projectif, il est aussi FH-projectif par restriction, et on voit facilement que cela implique FH-libre. Donc $\dim_F P$ est un multiple de $[H:1] = p^n$. (Cf. [Serre], p. 145, Exercice 3.)

L'exposant de Coker c est donc exactement p^n.

Il reste encore à définir

$$\Psi_p : K(F\,G) \to K(F\,G)\,,$$

où p = caract (F)

Dans le cas où F est parfait, e.g. algébriquement clos, la définition est dictée par le fait que F admet l'automorphisme de Frobenius $\sigma : F \to F$ tel que $\sigma(a) = a^p$. D'après la propriété (6) au § 4, $\Psi_p(\alpha) = \sigma(\alpha)$ pour tout $\alpha \in R(FG)$.

On n'a donc pas le choix:

$$\Psi_p(P) = \sigma(P)\,,$$

où $\sigma(P)$ est évidemment FG-projectif si P l'est.

Pour attraper $\Psi_p : K(FG) \to K(FG)$ pour F quelconque, on peut utiliser le fait bien connu que $i_K : K(FG) \to K(LG)$ est une injection directe. (caract $(F) \neq 0$, L une clôture algébrique de F. Cf. [Serre], p. 136.) Donc, Coker i_K est sans torsion.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(FG) & \xrightarrow{c_F} & R(FG) \\ \downarrow i_K & & \downarrow i_R \\ K(LG) & \xrightarrow{c_L} & R(LG) \end{array}$$

nous apprend alors que

$$c_L : \text{Coker } i_K \to \text{Coker } i_R$$

est injectif. (Compte tenu du fait démontré ci-dessus que Coker c_F est fini.)

Or, pour tout $\alpha \in K(FG)$, on a

$$c_L\,\Psi_p\,i_K\,\alpha = \Psi_p\,c_L\,i_K\,\alpha = \Psi_p\,i_K\,c_F\,\alpha = i_R\,\Psi_p\,c_F\,\alpha\,.$$

Donc, $c_L\,\Psi_p\,i_K\,\alpha$ représente $0 \in$ Coker i_R. Il en résulte que $\Psi_p\,i_K \in i_K\,K(FG)$ et il existe un élément $\beta \in K(FG)$, unique puisque i_K est injectif, tel que $\Psi_p\,i_K\,\alpha = i_K\,\beta$. On pose $\Psi_p\,\alpha = \beta$.

La définition de Ψ_n pour n entier quelconque est immédiate et dictée par les propriétés $\Psi_{kn} = \Psi_k\,.\,\Psi_n$ et la périodicité ou la propriété $\Psi_{-n}(\alpha) = (\Psi_n\alpha)^*$.

(Reçu le 5 mai 1975)

M. Kervaire

Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
1211 Genève 24